Coleção Professor de Matemática

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073 / 2529-5095
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-8337-007-9

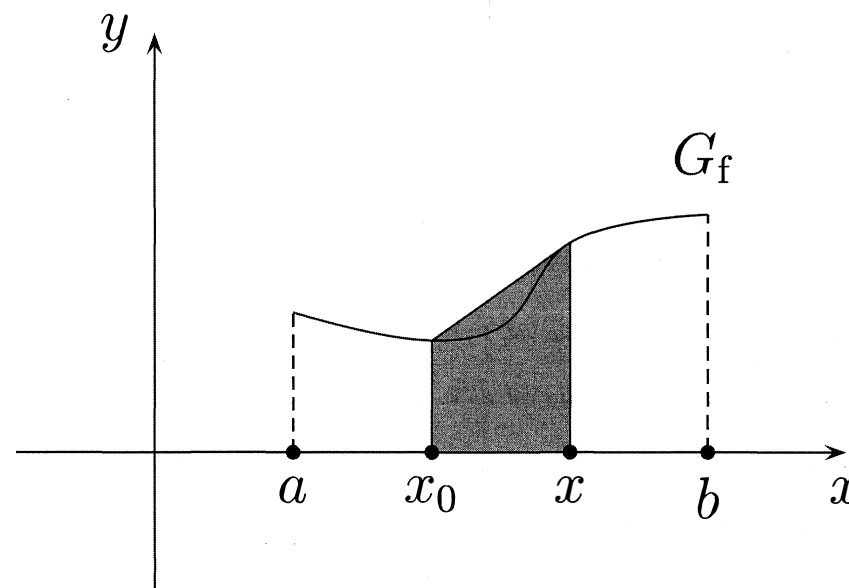
MUNIZ NETO, Antonio Caminha.
Tópicos de Matemática Elementar: introdução à análise funcional / Caminha Muniz Neto.
-2.ed. -- Rio de Janeiro: SBM, 2012.
v.3 ; 331 p. (Coleção Professor de Matemática; 26)
ISBN 978-85-8337-007-9

1. Conceitos de Função. 2. Gráficos de Função. 3. Funções Contínuas. 4. Limites e Derivadas. I. Título.

Tópicos de Matemática Elementar

Volume 3

Introdução à Análise

Antonio Caminha Muniz Neto

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

2ª edição
2013
Rio de Janeiro

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 1 - Números Reais* - A. Caminha
- Tópicos de Matemática *Elementar - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 - Introdução à Análise* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 - Combinatória* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 5 - Teoria dos Números* - A. Caminha

A meus filhos Gabriel e Isabela,
na esperança de que um dia leiam este livro.

Sumário

Prefácio

Esta coleção evoluiu a partir de sessões de treinamento para olimpíadas de Matemática, por mim ministradas para alunos e professores do Ensino Médio, várias vezes ao longo dos anos de 1992 a 2003 e, mais recentemente, como orientador do Programa de Iniciação Científica para os premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do Projeto Amílcar Cabral de cooperação educacional entre Brasil e Cabo Verde.

Idealmente, planejei o texto como uma mistura entre uma iniciação suave e essencialmente autocontida ao fascinante mundo das competições de Matemática, além de uma bibliografia auxiliar aos estudantes e professores do secundário interessados em aprofundar seus conhecimentos matemáticos. Resumidamente, seu propósito primordial é apresentar ao leitor uma abordagem de quase todos os conteúdos geralmente constantes dos currículos do secundário, e que seja ao mesmo tempo concisa, não excessivamente tersa, logicamente estruturada e mais aprofundada que a usual.

Na estruturação dos livros, me ative à máxima do eminente matemático húngaro-americano George Pólya, que dizia não se poder fazer

Matemática sem *sujar as mãos*. Assim sendo, em vários pontos deixei a cargo do leitor a tarefa de verificar aspectos não centrais aos desenvolvimentos principais, quer na forma de detalhes omitidos em demonstrações, quer na de extensões secundárias da teoria. Nestes casos, frequentemente referi o leitor a problemas específicos, os quais se encontram marcados com * e cuja análise e solução considero parte integrante e essencial do texto. Colecionei ainda, em cada seção, outros tantos problemas, cuidadosamente escolhidos na direção de exercitar os resultados principais elencados ao longo da discussão, bem como estendê-los. Uns poucos destes problemas são quase imediatos, ao passo que a maioria, para os quais via de regra oferto sugestões precisas, é razoavelmente difícil; no entanto, insto veementemente o leitor a debruçar-se sobre o maior número possível deles por tempo suficiente para, ainda que não os resolva todos, passar a apreciá-los como corpo de conhecimento adquirido.

O primeiro volume discorre sobre vários aspectos relevantes do conjunto dos números reais e de álgebra elementar, no intuito de munir o leitor dos requisitos necessários ao estudo dos tópicos constantes dos volumes subsequentes. Após começar com uma discussão não axiomática das propriedades mais elementares dos números reais, são abordados, em seguida, produtos notáveis, equações e sistemas de equações, sequências elementares, indução matemática e números binomiais; o texto finda com a discussão de várias desigualdades algébricas importantes, notadamente aquela entre as médias aritmética e geométrica, bem como as desigualdades de Cauchy, de Chebychev e de Abel.

Dedicamos o segundo volume a uma iniciação do leitor à geometria Euclidiana plana, inicialmente de forma não axiomática e enfatizando construções geométricas elementares. Entretanto, à medida em que o texto evolui, o método sintético de Euclides – e, consequentemente, demonstrações – ganha importância, principalmente com a discussão dos conceitos de congruência e semelhança de triângulos; a partir desse ponto, vários belos teoremas clássicos da geometria, usualmente ausen-

tes dos livros-texto do secundário, fazem sua aparição. Numa terceira etapa, o texto apresenta outros métodos elementares usuais no estudo da geometria, quais sejam, o método analítico de R. Descartes, a trigonometria e o uso de vetores; por sua vez, tais métodos são utilizados tanto para reobter resultados anteriores de outra(s) maneira(s) quanto para deduzir novos resultados.

De posse do traquejo algébrico construído no volume inicial e do aparato geométrico do volume dois, discorremos no volume três sobre aspectos elementares de funções e certos excertos de cálculo diferencial e integral e análise matemática, os quais se fazem necessários em certos pontos dos três volumes restantes. Prescindindo, inicialmente, das noções básicas do Cálculo, elaboramos, dentre outros, as noções de gráfico, monotonicidade e extremos de funções, bem como examinamos o problema da determinação de funções definidas implicitamente por relações algébricas. Na continuação, o conceito de função contínua é apresentado, primeiramente de forma intuitiva e, em seguida, axiomática, sendo demonstrados os principais resultados pertinentes. Em especial, utilizamos este conceito para estudar a convexidade de gráficos – culminando com a demonstração da desigualdade de J. Jensen – e o problema da definição rigorosa da área sob o gráfico de uma função contínua e positiva – que, por sua vez, possibilita a apresentação de uma construção adequada das funções logaritmo natural e exponencial. O volume três termina com uma discussão das propriedades mais elementares de derivadas e do teorema fundamental do cálculo, os quais são mais uma vez aplicados ao estudo de desigualdades, em especial da desigualdade entre as médias de potências.

O volume quatro é devotado à análise combinatória. Começamos revisando as técnicas mais elementares de contagem, enfatizando as construções de bijeções e argumentos recursivos como estratégias básicas. Na continuação, apresentamos um apanhado de métodos de contagem um tanto mais sofisticados, como o princípio da inclusão exclusão e os métodos de contagem dupla, do número de classes de

equivalência e mediante o emprego de métricas em conjuntos finitos. A cena é então ocupada por funções geradoras, onde a teoria elementar de séries de potências nos permite discutir de outra maneira problemas antigos e introduzir problemas novos, antes inacessíveis. Terminada nossa excursão pelo mundo da contagem, enveredamos pelo estudo do problema da existência de uma configuração especial no universo das configurações possíveis, utilizando para tanto o princípio das gavetas de G. L. Dirichlet – vulgo "princípio das casas dos pombos" –, um célebre teorema de R. Dilworth e a procura e análise de invariantes associados a problemas algorítmicos. A última estrutura combinatória que discutimos é a de um grafo, quando apresentamos os conceitos básicos usuais da teoria com vistas à discussão de três teoremas clássicos importantes: a caracterização da existência de caminhos Eulerianos, o teorema de A. Cayley sobre o número de árvores rotuladas e o teorema extremal de P. Turán sobre a existência de subgrafos completos em um grafo.

Passamos em seguida, no quinto volume, à discussão dos conceitos e resultados mais elementares de teoria dos números, ressaltando-se inicialmente a teoria básica do máximo divisor comum e o teorema fundamental da aritmética. Discutimos também o método da descida de P. de Fermat como ferramenta para provar a inexistência de soluções inteiras para certas equações diofantinas, e resolvemos também a famosa equação de J. Pell. Em seguida, preparamos o terreno para a discussão do famoso teorema de Euler sobre congruências, construindo a igualmente famosa função de Euler com o auxílio da teoria mais geral de funções aritméticas multiplicativas. A partir daí, o livro apresenta formalmente o conceito de congruência de números em relação a um certo módulo, discutindo extensivamente os resultados usualmente constantes dos cursos introdutórios sobre o assunto, incluindo raízes primitivas, resíduos quadráticos e o teorema de Fermat de caracterização dos inteiros que podem ser escritos como soma de dois quadrados. O grande diferencial aqui, do nosso ponto de vista, é o calibre dos

exemplos discutidos e dos problemas propostos ao longo do texto, boa parte dos quais oriundos de variadas competições ao redor do mundo.

Finalmente, números complexos e polinômios são os objetos de estudo do sexto e último volume da coleção. Para além da teoria correspondente usualmente estudada no secundário – como a noção de grau, o algoritmo da divisão e o conceito de raízes de polinômios –, vários são os tópicos não padrão abordados aqui. Dentre outros, destacamos inicialmente a utilização de números complexos e polinômios como ferramentas de contagem e a apresentação quase completa de uma das mais simples demonstrações do teorema fundamental da álgebra. A seguir, estudamos o famoso teorema de I. Newton sobre polinômios simétricos e as igualmente famosas desigualdades de Newton, as quais estendem a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. O próximo tema concerne os aspectos básicos da teoria de interpolação de polinômios, quando dispensamos especial atenção aos polinômios interpoladores de J. L. Lagrange. Estes, por sua vez, são utilizados para resolver sistemas lineares de Vandermonde sem o recurso à álgebra linear, os quais, a seu turno, possibilitam o estudo de uma classe particular de sequências recorrentes lineares. O livro termina com o estudo das propriedades de fatoração de polinômios com coeficientes inteiros, racionais ou pertencentes ao conjunto das classes de congruência relativas a algum módulo primo, seguido do estudo do conceito de número algébrico. Há, aqui, dois pontos culminantes: por um lado, uma prova mais simples do fechamento do conjunto dos números algébricos em relação às operações aritméticas básicas; por outro, o emprego de polinômios ciclotômicos para provar um caso particular do teorema de Dirichlet sobre primos em progressões aritméticas.

Várias pessoas contribuíram ao longo dos anos, direta ou indiretamente, para que um punhado de anotações em cadernos pudesse transformar-se nesta coleção de livros. Os ex-professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, Marcondes

Cavalcante França, João Marques Pereira, Guilherme Lincoln Aguiar Ellery e Raimundo Thompson Gonçalves, ao criarem a Olimpíada Cearense de Matemática na década de 1980, motivaram centenas de jovens cearenses, dentre os quais eu me encontrava, a estudarem mais Matemática. Meu ex-professor do Colégio Militar de Fortaleza, Antônio Valdenísio Bezerra, ao convidar-me, inicialmente para assistir a suas aulas de treinamento para a Olimpíada Cearense de Matemática e posteriormente para dar aulas consigo, iniciou-me no maravilhoso mundo das competições de Matemática e influenciou definitivamente minha escolha profissional. Os comentários de muitos de vários de ex-alunos contribuíram muito para o formato final de boa parte do material aqui colecionado; nesse sentido, agradeço especialmente a João Luiz de Alencar Araripe Falcão, Roney Rodger Sales de Castro, Marcelo Mendes de Oliveira, Marcondes Cavalcante França Jr., Marcelo Cruz de Souza, Eduardo Cabral Balreira, Breno de Alencar Araripe Falcão, Fabrício Siqueira Benevides, Rui Facundo Vigelis, Daniel Pinheiro Sobreira, Antônia Taline de Souza Mendonça, Carlos Augusto David Ribeiro, Samuel Barbosa Feitosa, Davi Máximo Alexandrino Nogueira e Yuri Gomes Lima. Vários de meus colegas professores teceram comentários pertinentes, os quais foram incorporados ao texto de uma ou outra maneira; agradeço, em especial, a Fláudio José Gonçalves, Francisco José da Silva Jr., Onofre Campos da Silva Farias, Emanuel Augusto de Souza Carneiro, Marcelo Mendes de Oliveira, Samuel Barbosa Feitosa e Francisco Bruno de Lima Holanda. Os professores João Lucas Barbosa e Hélio Barros deram-me a conclusão de parte destas notas como alvo a perseguir ao me convidarem a participar do Projeto Amílcar Cabral de treinamento dos professores de Matemática da República do Cabo Verde. Meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, Abdênago Alves de Barros, José Othon Dantas Lopes, José Robério Rogério e Fernanda Esther Camillo Camargo, bem como meu orientando de iniciação científica Itamar Sales de Oliveira Filho, leram partes do texto final e ofereceram várias sugestões. Os pareceristas indicados pela SBM opinaram decisivamente para que os livros certamente resultassem melhores que a versão inicial por mim submetida. O presidente da SBM, professor Hilário Alencar da Silva, o antigo editor-chefe da SBM, professor Roberto Imbuzeiro de Oliveira, bem como o novo editor-chefe, professor Abramo Hefez, foram sempre extremamente solícitos e atenciosos comigo ao longo de todo o processo de edição. Por fim, quaisquer erros ou incongruências que ainda se façam presentes, ou omissões na lista acima, são de minha inteira responsabilidade.

Por fim e principalmente, gostaria de agradecer a meus pais, Antonio Caminha Muniz Filho e Rosemary Carvalho Caminha Muniz, e à minha esposa Mônica Valesca Mota Caminha Muniz. Meus pais me fizeram compreender a importância do conhecimento desde a mais tenra idade, sem nunca terem medido esforços para que eu e meus irmãos desfrutássemos o melhor ensino disponível; minha esposa brindou-me com a harmonia e o incentivo necessários à manutenção de meu ânimo e humor, em longos meses de trabalho solitário nas madrugadas. Esta coleção de livros também é dedicada a eles.

FORTALEZA, JANEIRO de 2012

Antonio Caminha M. Neto

Prefácio à $2^{\underline{a}}$ edição

Para a segunda edição fiz uma extensa revisão do texto e dos problemas propostos, corrigindo várias imprecisões de língua portuguesa e de Matemática. Adicionei também alguns problemas novos, no intuito de melhor exercitar certos pontos da teoria, os quais não se encontravam adequadamente contemplados pelos problemas propostos à primeira edição. Nesta segunda edição as sugestões e soluções aos problemas propostos foram colecionadas em um capítulo separado (o capítulo 7, para este volume); adicionalmente, apresentei sugestões ou soluções a todos os problemas com algum grau de dificuldade.

Por fim, gostaria de aproveitar o ensejo para agradecer à comunidade matemática brasileira, em geral, e a todos os leitores que me enviaram sugestões ou correções, em particular, o excelente acolhimento desfrutado pela primeira edição desta obra.

FORTALEZA, OUTUBRO de 2013

Antonio Caminha M. Neto

CAPÍTULO 1

O Conceito de Função

De posse do ferramental algébrico desenvolvido no volume 1, começamos, neste capítulo, o desenvolvimento das propriedades elementares de funções. Como naquele volume, assumiremos do leitor uma relativa familiaridade com conjuntos e operações elementares com os mesmos.

Após apresentar os conceitos mais básicos sobre funções, como as noções de domínio, contradomínio e imagem, alguns exemplos relevantes são introduzidos. Em seguida, introduzimos as noções de monotonicidade e valores extremos, discutindo vários exemplos que, apesar de elementares, se revelarão bastante úteis. O capítulo continua com o estudo das operações de composição e inversão de funções, e culmina com a orquestração de todo o material discutido no estudo de funções definidas implicitamente por relações algébricas, as quais podem ser vistas como *análogos discretos* de equações diferenciais ordinárias.

1.1 Definições e exemplos

Sejam dados conjuntos não vazios X e Y. Informalmente, uma **função** f de X em Y é uma *regra* que associa a cada $x \in X$ um único $y \in Y$. Por vezes podemos visualizar uma função $f : X \to Y$ de uma maneira mais concreta por meio de diagramas como o da figura 1.1, onde cada seta indica que elemento $y \in Y$ está associado a cada $x \in X$.

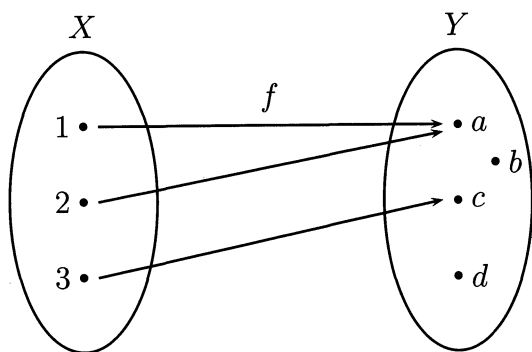



Figura 1.1: exemplo de função f de X em Y.

Escrevemos $f : X \to Y$ para denotar que f é uma função de X em Y. Nesse caso, o elemento $y \in Y$ associado a $x \in X$ por f é denotado por $y = f(x)$, sendo denominado a **imagem** de $x \in X$ pela função f. No exemplo da figura 1.1, temos $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ e $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = c$. Assim, a é a imagem de 1 e de 2 por f, e c é a imagem de 3 por f.

Como atestado pelo exemplo acima, a definição de função permite que, no diagrama correspondente, um ou mais elementos de Y *não recebam setas* ou, ainda, que um ou mais elementos de Y *recebam mais de uma seta* (observe que ambas essas possibilidades estão presentes na figura 1.1). Note, contudo, que os diagramas das figuras 1.2 e 1.3

não correspondem a funções.

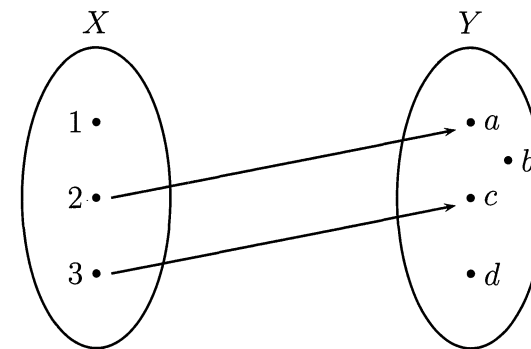



Figura 1.2: X tem elementos dos quais não parte seta alguma.

A situação da figura 1.2 é proibida porque não há nenhuma seta partindo do elemento $1 \in X$. A situação da figura 1.3 é proibida porque do elemento $1 \in X$ parte mais de uma seta.

As três definições a seguir explicitam alguns tipos extremamente úteis de funções.

Definição 1.1. Dados conjuntos não vazios X e Y e fixado um elemento $c \in Y$, a **função constante** c de X em Y é a função $f : X \to Y$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in X$.

No caso extremo da função constante e igual a c, definida acima, todo $x \in X$ está associado a um mesmo $y \in Y$, qual seja, $y = c$. Contudo, as condições impostas na "definição" de função são plenamente satisfeitas, i.e., *todo* $x \in X$ está associado a um *único* $y \in X$.

Definição 1.2. Dado um conjunto não vazio X, a **função identidade** de X, denotada por $\mathrm{Id}_X : X \to X$, é a função dada por $\mathrm{Id}_X(x) = x$, para todo $x \in X$.

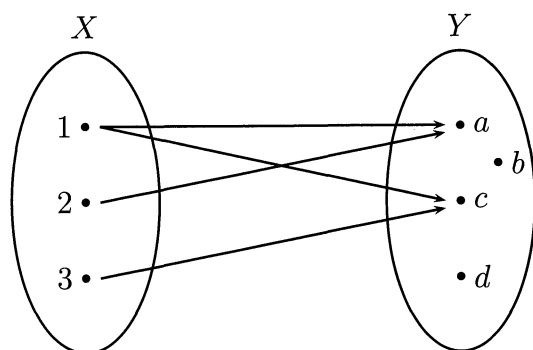



Figura 1.3: X tem elementos dos quais parte mais de uma seta.

Assim como no exemplo anterior, é imediato que as condições exigidas pela "definição" de função estão satisfeitas, de sorte que Id_X é realmente uma função.

Para o que segue, fixado arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n o conjunto dos n primeiros números naturais, i.e., $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Por exemplo, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ e assim por diante.

Definição 1.3. Uma **sequência (infinita)** de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Uma **sequência (finita)** de números reais é uma função $f : I_n \to \mathbb{R}$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Dada uma sequência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (resp. $f : I_n \to \mathbb{R}$) é costume denotar, para $k \geq 1$ inteiro, $a_k = f(k)$. Desta forma, obtemos a notação usual para sequências, qual seja,

$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), a_3 = f(3), \ldots.$$

Como no capítulo 4 do volume 1, denotamos a sequência em questão simplesmente por $(a_k)_{k \geq 1}$ (resp. $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$).

De um ponto de vista matematicamente mais rigoroso, uma função é um caso particular de uma *relação* entre dois conjuntos, de acordo com a seguinte

Definição 1.4. Dados conjuntos não vazios X e Y, uma **relação** de X em Y (ou entre X e Y, nessa ordem) é um subconjunto R do produto cartesiano $X \times Y$, i.e., R é um conjunto de pares ordenados do tipo (x, y), com $x \in X$ e $y \in Y$. Se R é uma relação de X em X, diremos simplesmente que R é uma *relação em* X.

Exemplo 1.5. Se $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 5\}$, o conjunto

$$R = \{(x, y) \in X \times Y; \, x \geq y\}$$

é a relação de X em Y dada por $R = \{(2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$; de fato, esses são os únicos pares ordenados (x, y), com $x \in \{1, 2, 3\}$, $y \in \{2, 3, 4, 5\}$ e tais que $x \geq y$.

O exemplo acima é um caso particular de um procedimento óbvio a que podemos recorrer para construirmos relações específicas R entre conjuntos não vazios X e Y: basta especificarmos, de alguma maneira, um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$. Aqueles pares ordenados de $X \times Y$ que satisfizerem a especificação prescrita serão os elementos de R. Sendo (x, y) um tal par, diremos que x e y são *relacionados* por R.

Se R é uma relação de X em Y, então $R \subset X \times Y$ por definição. Reciprocamente, escolhido um par ordenado $(x, y) \in X \times Y$, pode ocorrer que $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \notin R$ (i.e., que x e y sejam relacionados por R, ou não). No primeiro caso, escrevemos $x \, R \, y$; no segundo, $x \not R \, y$. Em símbolos,

$$x \, R \, y \Leftrightarrow (x, y) \in R. \quad (1.1)$$

Assim é que, para a relação do exemplo acima, temos $3 \, R \, 2$ mas $2 \not R \, 3$, uma vez que $2 \geq 3$ é falso.

Dentre todos os tipos de relação que podemos considerar entre dois conjuntos não vazios, o principal é aquele dado pela seguinte

Definição 1.6. Dados conjuntos não vazios X e Y, uma relação f de X em Y é uma **função** se a seguinte condição for satisfeita:

$$\forall x \in X, \exists \text{ um único } y \in Y;\ xfy.$$

Como antes, escrevemos $f : X \to Y$ para denotar que f é uma função de X em Y e $f(x) = y$ para denotar que o par $(x, y) \in X \times Y$ é relacionado por f, i.e., satisfaz xfy. Observe que tal notação faz sentido, uma vez que a definição de função garante que se (x, y_1) e (x, y_2) são pares ordenados em $X \times Y$ tais que xfy_1 e xfy_2, então $y_1 = y_2$. Por outro lado, é imediato verificar que a definição formal acima coincide com a definição informal dada no início desta seção.

O mais das vezes, trabalharemos com funções $f : X \to Y$ tais que $X, Y \subset \mathbb{R}$. Em tais casos, geralmente indicaremos quem é o elemento $f(x) \in Y$ associado a um elemento genérico $x \in X$ por meio de uma *fórmula* em x que explicite uma regra que a função deva satisfazer. Por exemplo, podemos dizer: *considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. Isto quer dizer que a função associa, a cada $x \in \mathbb{R}$, seu quadrado x^2. Veja que os requisitos definidores de uma função estão satisfeitos, uma vez que, a cada $x \in \mathbb{R}$, temos associado um único outro real $f(x)$, qual seja, x^2. Assim é que, ainda em relação a esse exemplo, temos $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, $f(3) = 3^2 = 9$, etc.

Quando $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to Y$ é uma função tal que o elemento $f(x) \in Y$ associado a $x \in X$ é dado por uma fórmula em x, denotamos por vezes tal correspondência escrevendo

$$\begin{array}{rcl} f : X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

Assim, a função do parágrafo anterior, que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ seu quadrado x^2, poderia ser denotada da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}.$$

Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 1.7. Considere a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1}, & \text{se } x \le 0 \\ x + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Certamente que temos uma função, pois as expressões que definem $f(x)$ têm sentido em $\mathbb{R}$ e, apesar de devermos aplicar fórmulas diferentes, conforme o racional x satisfaça $x \le 0$ ou $x > 0$, cada racional x tem uma única imagem $f(x)$ bem definida, posto que os casos $x \le 0$ e $x > 0$ cobrem todos os racionais. Assim, por exemplo, $f(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$ (uma vez que $-1 \le 0$), mas $f(2) = 2 + 1 = 3$ (uma vez que $2 > 0$).

Observe que poderíamos ter definido $f(x)$ escrevendo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1}, & \text{se } x \le 0 \\ x + 1, & \text{se } x \ge 0 \end{cases}.$$

Nesse caso, as condições $x \le 0$ e $x \ge 0$ cobrem todos os racionais mas não são mais disjuntas: $x = 0$ satisfaz ambas; no entanto, as fórmulas que devemos aplicar a um caso ou outro dão um mesmo resultado quando $x = 0$ (uma vez que $\sqrt{0^2 + 1} = 0 + 1$), afastando assim qualquer possibilidade de inconsistência.

Dizemos por vezes que uma função f como a do exemplo acima está **definida por partes**, em alusão ao fato de que há uma fórmula para calcular $f(x)$ quando $x \in (-\infty, 0]$ e outra quando $x \in (0, +\infty)$ (ou $x \in [0, +\infty)$, conforme se queira).

Ao lidarmos com uma função $f : X \to Y$, é frequentemente útil denominarmos os conjuntos X e Y, respectivamente, de **domínio** e **contradomínio** da função; nesse contexto, denotaremos $X = \text{Dom}\,(f)$. Assim é que, para a função f do exemplo 1.7, o domínio e o contradomínio são, respectivamente, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

O mais das vezes vamos trabalhar com funções $f : X \to \mathbb{R}$ tais que $X \subset \mathbb{R}$. Em tais casos, diremos que f é uma **função real** (em alusão

ao fato de que f assume valores reais – i.e., de que seu contradomínio é $\mathbb{R}$) de **uma variável real** (em alusão ao fato de que um elemento genérico x do domínio X de f – a *variável* da função – é um número real).

Ainda em tais casos, quando os valores $f(x)$ forem dados por uma fórmula, como por exemplo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$, salvo menção em contrário, convencionamos tomar X como sendo igual ao *maior domínio possível.* De outro modo, tomamos X como igual ao maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual as operações matemáticas que definem a expressão $f(x)$ têm sentido. Diremos, então, que X é o **domínio maximal de definição**, ou simplesmente o **domínio maximal** de f.

Exemplo 1.8. A título de ilustração, encontremos o domínio maximal $X \subset \mathbb{R}$ da função $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$. Temos

$$\begin{aligned} X &= \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R};\ x(x-1) > 0\}. \end{aligned}$$

Como, para um produto ser positivo, ambos os fatores devem ter um mesmo sinal, devemos ter $x > 0$ e $x-1 > 0$, ou então $x < 0$ e $x-1 < 0$, i.e., $x > 1$ ou então $x < 0$. Portanto,

$$X = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

No contexto de funções reais de variável real, temos maneiras padrão de construir novas funções a partir de outras já conhecidas, utilizando as operações aritméticas do contradomínio $\mathbb{R}$ das mesmas. Mais precisamente, dados um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$, um número real c e funções reais de uma variável real $f, g : X \to \mathbb{R}$ (de mesmo domínio!), definimos as funções

$$f + g,\ f \cdot g \text{ e } c \cdot f : X \to \mathbb{R}$$

pondo

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), \\ (c \cdot f)(x) &= c \cdot f(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Algumas observações são pertinentes. Em primeiro lugar, veja que os sinais de adição na igualdade

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

têm significados distintos: no primeiro membro temos a *definição* da função $f+g$, ao passo que, no segundo membro, $f(x)+g(x)$ representa a adição usual dos números reais $f(x)$ e $g(x)$. Uma observação análoga é válida para os sinais de multiplicação utilizados nas definições das funções $f \cdot g$ e $c \cdot f$. Em segundo lugar, assim como com números reais, omitiremos em geral o sinal de multiplicação, escrevendo fg e cf em vez de $f \cdot g$ e $c \cdot f$, mas isto não deve causar confusão.

É evidente que $f+g$, fg e cf são realmente funções de X em $\mathbb{R}$. As funções $f+g$ e fg são denominadas, respectivamente, a **soma** e o **produto** das funções f e g. Por outro lado, o produto cf do número real c pela função f pode ser visto como caso particular do produto de duas funções: tomando g como a função constante e igual a c, temos $fg = cf$; ainda para tal g, denotaremos $f+g$ simplesmente por $f+c$, i.e.,

$$(f+c)(x) = f(x) + c,$$

para todo $x \in X$.

Exemplo 1.9. Sendo f e g as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e $g(x) = -x+3$, temos

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \frac{x}{x^2+1} + (-x+3) \\ &= \frac{x + (x^2+1)(-x+3)}{x^2+1} = \frac{-x^3+3x^2+3}{x^2+1}, \end{aligned}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{x}{x^2+1} \cdot (-x+3) = \frac{-x^2+3x}{x^2+1}$$

e

$$(\sqrt{3}f)(x) = \sqrt{3}f(x) = \sqrt{3} \cdot \frac{x}{x^2+1} = \frac{x\sqrt{3}}{x^2+1}.$$

Deixamos ao leitor a verificação de que as operações de *adição* e *multiplicação* para funções acima definidas satisfazem propriedades análogas àquelas das operações correspondentes com números reais. Mais precisamente, para $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos:

- *Comutatividade*: $f + g = g + f$; $fg = gf$.
- *Associatividade*: $f + (g + h) = (f + g) + h$; $f(gh) = (fg)h$.
- *Distributividade*: $f(g + h) = fg + fh$.

Por fim, note que a associatividade da adição e da multiplicação de funções permite definir, de modo inteiramente análogo, a soma ou o produto de um número finito qualquer de funções de X em $\mathbb{R}$. Sugerimos ao leitor consultar o problema 4 para uma extensão adicional da discussão acima.

Voltemos ao estudo do contradomínio de uma função $f : X \to Y$. É importante notar que o contradomínio Y em geral *não coincide* com o conjunto formado pelas imagens dos elementos de X. Ilustremos essa diferença utilizando novamente a função f do exemplo 1.7. Já observamos que o contradomínio da mesma é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Por outro lado, o conjunto formado pelas imagens $f(x)$ dos elementos do domínio $\mathbb{Q}$ de f certamente não contém números reais menores que 1. De fato, para um racional x qualquer, temos $x^2 + 1 \geq 1$ e, daí,

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{1} = 1;$$

por outro lado, para um racional $x > 0$, temos $f(x) = x + 1 > 1$, de maneira que

$$\{f(x); x \in \mathbb{Q}\} \subset [1, +\infty).$$

Note, por fim, que o intervalo $[1, +\infty)$ é um subconjunto próprio do contradomínio $\mathbb{R}$ de f.

Mais geralmente, dada uma função $f : X \to Y$, o **conjunto imagem**, ou simplesmente a **imagem** da função f é o conjunto $\mathrm{Im}(f)$, cujos elementos são as imagens $f(x) \in Y$ dos elementos $x \in X$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \in Y; x \in X\}.$$

Em particular, temos sempre $\mathrm{Im}(f) \subset Y$, e a discussão acima mostra que pode ocorrer $\mathrm{Im}(f) \neq Y$.

No exemplo discutido acima, mostramos que a imagem da função era um subconjunto próprio do contradomínio da mesma. No entanto, não chegamos a explicitar precisamente tal conjunto-imagem. Em situações específicas essa tarefa pode ser consideravelmente difícil, como atesta o seguinte

Exemplo 1.10. Explicitemos a imagem da função $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(r) = \frac{1}{b}$, se o racional r estiver escrito da forma $r = \frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ e $\mathrm{mdc}\,(a, b) = 1$ (para maiores detalhes sobre o mdc de dois inteiros, veja a introdução ao capítulo 1 do volume 1 ou a seção 1.2 do volume 5).

Certamente a função f está definida de maneira não ambígua, uma vez que todo racional não nulo admite uma representação única como quociente de dois inteiros primos entre si, sendo o denominador natural. Por exemplo, $-\frac{4}{6} = \frac{-2}{3}$ e, daí, $f\left(-\frac{4}{6}\right) = \frac{1}{3}$. Por outro lado, como $b \in \mathbb{N}$, vemos imediatamente que

$$\mathrm{Im}(f) \subset \left\{\frac{1}{b}; b \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Ademais, é imediato que todos os números do último conjunto acima pertencem à imagem de f, já que $f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b}$ para todo $b \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Infelizmente não existe um algoritmo[1] que nos permita encontrar explicitamente a imagem de uma função qualquer dada. No entanto, ao longo dos capítulos subsequentes resolveremos o problema de encontrar o conjunto-imagem para vários tipos importantes de funções.

Terminemos esta seção discutindo a igualdade de duas funções. Em relação à função f do exemplo 1.7, não faz sentido considerarmos $f(\sqrt{2})$, uma vez que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e f tem domínio $\mathbb{Q}$. O que poderíamos fazer seria considerar, em vez de f, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}, & \text{se } x \leq 0 \\ x+1, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Apesar das fórmulas que definem $f(x)$ e $g(x)$ serem as mesmas, para f elas só podem ser aplicadas a $x \in \mathbb{Q}$, ao passo que para g elas podem ser aplicadas a todo x real; assim, não faz sentido pensarmos em f e g como funções *iguais*, apenas denotadas de duas maneiras distintas.

Mais geralmente, temos a seguinte

Definição 1.11. Duas funções $f : X \to Y$ e $g : W \to Z$ são **iguais** se $X = W$, $Y = Z$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Se duas funções $f : X \to Y$ e $g : W \to Z$ forem iguais, escrevemos $f = g$. Frisamos que, de acordo com a definição acima, tal notação encerra mais significado que escrevermos $f(x) = g(x)$: ela significa a igualdade dos domínios, $X = W$, e dos contradomínios, $Y = Z$, assim como a validade da igualdade $f(x) = g(x)$, *para todo* $x \in X$. Se funções f e g como acima não forem iguais, escreveremos $f \neq g$ e diremos que f e g são funções *diferentes* ou *distintas*.

[1]Um **algoritmo** é uma sequência finita e bem determinada de procedimentos executáveis que, rigorosamente seguidos, fornecem a solução de um certo problema.

Problemas – Seção 1.1

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$. Prove que $f(x)$ tem o mesmo sinal de x, para todo real $x \neq 0$.

2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(1) = 2$, $f(\sqrt{2}) = 4$ e $f(x+y) = f(x)f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Calcule o valor de $f(3+\sqrt{2})$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todos x, y reais. Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r e $f(a_1) \neq 0$, prove que a sequência $(f(a_k))_{k\geq 1}$ é uma PG de razão $f(r)$.

4. * Dadas funções reais de variável real $f, g : X \to \mathbb{R}$, estenda a discussão do texto, apresentando definições apropriadas para a **diferença** $f - g$ e o **quociente** $\frac{f}{g}$ das funções f e g.

5. * A **parte inteira** de um real x é definida como o maior inteiro menor ou igual a x. Explicite a imagem da **função parte inteira**

$$\begin{array}{rccc} \lfloor\ \rfloor: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}, \qquad (1.2)$$

que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ sua parte inteira $\lfloor x \rfloor$.

6. * A **parte fracionária** de um real x é definida por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x (veja o problema anterior). Explicite a imagem da **função parte fracionária**

$$\begin{array}{rccc} \{\ \}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \{x\} \end{array}, \qquad (1.3)$$

que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ sua parte inteira $\{x\}$.

7. (Torneio das Cidades.) Prove que o $n-$ésimo natural que não é quadrado perfeito é igual a $\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \rfloor$.

8. * Seja $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}$. Prove os seguintes itens:

   (a) $f(0) = 0$ e $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

   (b) $f(x-y) = f(x) - f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

   (c) $f(kx) = kf(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$.

   (d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n}$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

   (e) $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1)$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Se $(a_k)_{k \geq 1}$ é uma PA de razão r, prove que a sequência $(f(a_k))_{k \geq 1}$ é uma PA de razão $f(r)$.

10. (IMO.) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tenhamos
$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y).$$
Se f não é identicamente nula e $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, prove que $|g(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

1.2 Monotonicidade, extremos e imagem

Comecemos esta seção concentrando-nos no problema de encontrar a imagem de uma função dada. Para tanto, recorde que a *imagem* de uma função $f : X \to Y$ é o conjunto
$$\text{Im}\,(f) = \{f(x) \in Y;\ x \in X\}.$$
Se a função f é real de uma variável real, i.e., se $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, uma maneira particularmente útil de declararmos sua imagem é escrevermos
$$\text{Im}\,(f) = \{y \in Y;\ y = f(x) \text{ para algum } x \in X\}.$$

Desta forma, se os valores $f(x)$ forem dados por uma expressão que dependa de $x \in X$, poderemos encarar o problema de encontrar a imagem de f como aquele de encontrar os $y \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $f(x) = y$ tenha pelo menos uma solução $x \in X$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.12. Uma **função afim** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ para todo x real, onde a e b são números reais dados, com $a \neq 0$. Uma **função linear** é uma função afim f como acima, tal que $b = 0$.

De acordo com a discussão acima, a imagem de uma função afim f como acima pode ser encontrada procurando o conjunto dos $y \in \mathbb{R}$ tais que a equação $ax + b = y$ tenha alguma solução $x \in \mathbb{R}$. Mas, como tal equação sempre admite a solução $x = \frac{y-b}{a}$, concluímos que todo $y \in \mathbb{R}$ pertence à imagem de f, de sorte que $\text{Im}\,(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.13. A **função de proporcionalidade inversa** é a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para encontrar sua imagem, é suficiente encontrar os $y \in \mathbb{R}$ para os quais exista $x \neq 0$ real (i.e., x pertencente ao domínio de f), tal que $f(x) = y$, i.e., tal que $\frac{1}{x} = y$. Se $y = 0$, tal equação claramente não admite solução; por outro lado, se $y \neq 0$, a mesma equação admite a solução $x = \frac{1}{y}$, de sorte que $\text{Im}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A continuação, precisamos da definição a seguir.

Definição 1.14. Uma **função quadrática** ou **de segundo grau** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo x real, onde a, b e c são números reais dados, com $a \neq 0$. O **discriminante** Δ da função f é o discriminante do trinômio de segundo grau ax^2+bx+c, i.e., $\Delta = b^2 - 4ac$.

O problema da determinação da imagem de uma função quadrática é suficientemente importante para ser colecionado na seguinte

Proposição 1.15. Em relação à função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, temos que:

(a) Se $a > 0$, então $\text{Im}\,(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$.

(b) Se $a < 0$, então $\text{Im}\,(f) = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

Ademais, em qualquer um dos casos acima, temos

$$f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

Prova. Seguindo a ideia geral esboçada anteriormente, basta encontrar os $y \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $ax^2 + bx + c = y$, i.e., a equação de segundo grau $ax^2 + bx + (c - y) = 0$, tenha solução. Também, assim como antes, uma condição necessária e suficiente para a existência de raízes[2] é que o discriminante dessa última equação seja não negativo, i.e., que $b^2 - 4a(c - y) \geq 0$. Mas, como $b^2 - 4ac = \Delta$, os y que procuramos são exatamente as soluções da inequação de primeiro grau

$$\Delta + 4ay \geq 0.$$

Consideramos agora os casos $a > 0$ e $a < 0$ separadamente. Se $a > 0$, então

$$4ay + \Delta \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{\Delta}{4a},$$

e segue daí

$$\text{Im}\,(f) = \left\{y \in \mathbb{R};\ y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\} = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right);$$

se $a < 0$, então

$$4ay + \Delta \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -\frac{\Delta}{4a},$$

[2]Aqui e em vários outros pontos do texto assumimos que o leitor possua certa familiaridade com a noção de raiz quadrada, sem nos preocuparmos em estabelecer sua existência rigorosamente. A esse respeito, veja, por exemplo, o capítulo 3 de [34].

de maneira que

$$\text{Im}\,(f) = \left\{y \in \mathbb{R};\ y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\} = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right].$$

Para o que falta, veja que, para $y \in \text{Im}\,(f)$, as soluções da equação $ax^2 + bx + c = y$ ($\Leftrightarrow ax^2 + bx + (c - y) = 0$) são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta + 4ay}}{2a}. \tag{1.4}$$

Portanto, a equação $f(x) = y$ admite uma solução única se, e só se, $\Delta + 4ay = 0$, ou, o que é o mesmo, se, e só se, $y = -\frac{\Delta}{4a}$; sendo esse o caso, temos, a partir de (1.4), que $x = -\frac{b}{2a}$. ■

Para o que segue, convencionamos dizer que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem *sinal constante* quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Corolário 1.16. A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem sinal constante se, e só se, $\Delta \leq 0$. Neste caso, temos $af(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De outro modo:

(a) Se $\Delta \leq 0$ e $a > 0$, então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Se $\Delta \leq 0$ e $a < 0$, então $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prova. Analisemos o caso $a > 0$, sendo o outro caso análogo. Se $\Delta \leq 0$, temos da proposição anterior que

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a} \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Reciprocamente, suponha que $a > 0$ e f tem sinal constante. Segue novamente da proposição anterior que a imagem de f contém números positivos, e a constância de sinal de f garante que deve ser $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, devemos ter

$$-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) \geq 0.$$

Logo, $\Delta \leq 0$. ■

Observação 1.17. *Uma pequena modificação do argumento apresentado no corolário acima permite concluir que*

i. Se $\Delta < 0$ *e* $a > 0$, *então* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

ii. Se $\Delta < 0$ *e* $a < 0$, *então* $f(x) < 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

O corolário acima pode ser utilizado para dar uma prova mais direta da desigualdade de Cauchy (teorema 7.14 do volume 1), conforme ensina o seguinte

Exemplo 1.18. Dados $n > 1$ inteiro e números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ não todos nulos e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ também não todos nulos, considere a função quadrática

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2 \\ &= Ax^2 - 2Bx + C, \end{aligned}$$

onde $A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, $B = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, $C = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$.

Uma vez que $f(x)$ é uma soma de quadrados, devemos ter $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, como $A > 0$, o corolário 1.16 garante que $\Delta = 4(B^2 - AC) \leq 0$. Portanto, $B^2 \leq AC$, ou, o que é o mesmo, $|B| \leq \sqrt{A}\sqrt{C}$. Substituindo os valores de A, B e C em tal desigualdade, obtemos a desigualdade de Cauchy.

De acordo com a dedução acima, a igualdade na desigualdade de Cauchy equivale à igualdade $\Delta = 0$ para a função, que por sua vez equivale à existência de um único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$. Mas, como $f(\alpha)$ é uma soma de quadrados, temos $f(\alpha) = 0$ se, e só se, cada um de tais quadrados for zero, i.e., se, e só se,

$$a_1\alpha - b_1 = a_2\alpha - b_2 = \cdots = a_n\alpha - b_n = 0.$$

Por fim, como ao menos um dos b_i é não nulo, temos $\alpha \neq 0$ e, escrevendo $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, obtemos

$$a_1 = \lambda b_1, \ a_2 = \lambda b_2, \ \ldots, \ a_n = \lambda b_n$$

como condição necessária e suficiente para a igualdade.

A fim de prosseguirmos nosso estudo de funções, precisamos agora da seguinte

Definição 1.19. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita:

(a) **crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

(b) **decrescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

(c) **não decrescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(d) **não crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Ademais, em um qualquer dos casos acima, dizemos que a função f é **monótona** em I[3].

A respeito da definição acima, um problema interessante é o de encontrar os *intervalos de monotonicidade* de uma função, i.e., dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, pede-se investigar em que intervalos f é crescente (resp. decrescente). Vejamos alguns exemplos elementares, postergando uma análise mais geral para a seção 6.3.

Exemplo 1.20. A função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada para $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = ax + b$ é crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$.

[3]Nas notações desta definição, vale observar que, para alguns autores, uma função f satisfazendo a condição do item (a) (resp. (b), (c), (d)) é dita *estritamente crescentes* (resp. *estritamente decrescentes*, *crescentes*, *decrescentes*).

Verifiquemos tal afirmação quando $a > 0$, sendo a análise do caso $a < 0$ totalmente análoga. Sendo $x_1 < x_2$ números reais quaisquer, segue de $a > 0$ que

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) > 0,$$

e f é crescente.

Exemplo 1.21. A função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ é crescente em $\mathbb{R}$. Para verificar tal afirmação, tome números reais $0 \leq a < b$. Então

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{b^2}{b+2} - \frac{a^2}{a+2} \\ &= \frac{1}{(a+2)(b+2)}[b^2(a+2) - a^2(b+2)], \end{aligned}$$

e, uma vez que $(a+2)(b+2) > 0$, basta mostrarmos que $b^2(a+2) - a^2(b+2) > 0$. Para tanto, veja que

$$\begin{aligned} b^2(a+2) - a^2(b+2) &= b^2a - a^2b + 2(b^2 - a^2) \\ &= ab(b-a) + 2(b-a)(b+a) \\ &= (b-a)[ab + 2(b+a)]; \end{aligned}$$

como $0 \leq a < b$, segue que ambos os fatores do último produto acima são positivos e, daí, $b^2(a+2) - a^2(b+2) > 0$.

Exemplo 1.22. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 2x$ é crescente. De fato, para números reais quaisquer $a < b$, temos

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= b^3 - a^3 + 2b - 2a \\ &= (b-a)(b^2 + ba + a^2) + 2(b-a) \\ &= (b-a)(b^2 + ab + a^2 + 2). \end{aligned}$$

Como $b - a > 0$, basta mostrarmos que $a^2 + ab + b^2 + 2 > 0$; uma possibilidade é usar a desigualdade entre as médias para dois numeros:

$$a^2 + b^2 + ab + 2 \geq 2|ab| + ab + 2 \geq |ab| + 2 > 0,$$

onde na penúltima passagem utilizamos o fato de que $|\alpha| + \alpha \geq 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

A proposição a seguir resolve, para funções quadráticas, o problema da determinação dos intervalos de monotonicidade.

Proposição 1.23. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Se $a > 0$, então f é decrescente em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e crescente em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

(b) Se $a < 0$, então f é crescente em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e decrescente em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Prova. Façamos a prova do item (a), sendo a prova do item (b) análoga. Para $x_2 > x_1 \geq -\frac{b}{2a}$, temos

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) \\ &= a(x_2 - x_1)\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right) > 0, \end{aligned}$$

uma vez que $x_2 > x_1 \geq -\frac{b}{2a}$ implica $x_2 - x_1 > 0$ e $x_2 + x_1 + \frac{b}{a} > 0$. O caso $x_1 < x_2 \leq -\frac{b}{2a}$ é análogo e também será deixado ao leitor. ■

A próxima definição é, de certa maneira, complementar à definição 1.19.

Definição 1.24. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que $y_0 \in \mathbb{R}$ é o **valor mínimo** de f em I se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(a) $\mathrm{Im}\,(f) \subset [y_0, +\infty)$.

(b) $y_0 \in \mathrm{Im}\,(f)$.

Nesse caso, os reais $x_0 \in I$ tais que $f(x_0) = y_0$ são denominados os **pontos de mínimo** da função f.

Analogamente, definimos o que se entende por **valor máximo** e **ponto de máximo** de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervalo). Genericamente, os pontos de máximo (resp. mínimo) de uma função são denominados seus **pontos extremos**; da mesma forma, os valores que a função assume em tais pontos são seus **valores extremos**.

Veremos na seção 6.3 como procurar pontos extremos para uma classe importante de funções, ditas *deriváveis*. Por ora, contentamo-nos com alguns exemplos elementares, o primeiro dos quais sendo uma consequência imediata da proposição 1.15.

Proposição 1.25. Em relação à função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, se $a > 0$ (resp. $a < 0$), então $-\frac{b}{2a}$ é o único ponto de mínimo (resp. máximo) de f. Ademais, o valor mínimo (máximo) de f é $-\frac{\Delta}{4a}$.

A proposição acima tem várias aplicações interessantes, duas das quais colecionadas abaixo à guisa de ilustração.

Exemplo 1.26. Temos um semicírculo de diâmetro AB, centro O e raio 1cm (figura 1.4). O retângulo $PQRS$ tem o lado PQ situado sobre o diâmetro do semicírculo e os vértices R e S situados sobre o mesmo. Calcule o maior valor possível para sua área.

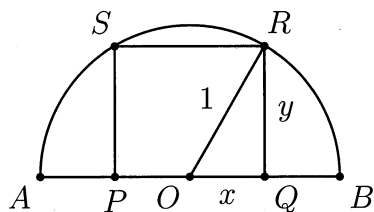



Figura 1.4: maximizando a área de $PQRS$.

Solução. Sendo $\overline{OQ} = x$ e $\overline{QR} = y$, temos que a área de $PQRS$ é igual a $2xy$. Por outro lado, segue do teorema de Pitágoras aplicado

ao triângulo OQR que $x^2 + y^2 = 1$ e, daí,

$$2xy = 2x\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{x^2(1-x^2)} = 2\sqrt{x^2-x^4}.$$

Fazendo a substituição $z = x^2$, segue da expressão acima para a área que basta maximizar a função de segundo grau $f(z) = z - z^2$, com a condição de que $0 < z < 1$ (uma vez que $x < \overline{OR} = 1$). Pela proposição 1.25, tal função admite $z = \frac{1}{2}$ como seu único ponto de máximo; como $\frac{1}{2} \in (0,1)$, segue que o valor máximo desejado é $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Portanto, o valor máximo para a área é $2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$. ■

Exemplo 1.27. Dado um triângulo ABC no plano, mostre que seu baricentro G é o único ponto P do plano de ABC para o qual a soma $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ é a menor possível.

Prova. Escolha um sistema Cartesiano de coordenadas, em relação ao qual tenhamos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$. Se $P(x, y)$, então a fórmula para a distância entre dois pontos do plano Cartesiano fornece

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = f(x) + g(y),$$

onde

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3}(x - x_i)^2 = 3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

e, analogamente, $g(y) = 3y^2 - 2(y_1 + y_2 + y_3)y + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$.

Como x e y são variáveis independentes, a fim de minimizarmos a soma $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ é suficiente minimizarmos as funções quadráticas f e g. Para tanto, recorrendo à proposição 1.25 concluímos que f e g atingem seus valores mínimos somente nos pontos $x = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ e $y = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$, respectivamente, os quais são (cf. equação (6.3) do volume 2) precisamente as coordenadas do baricentro G do triângulo ABC. ■

Outra estratégia elementar, por vezes útil, para abordar o problema de encontrar os valores máximo e/ou mínimo de uma função dada é a utilização de desigualdades. A seguir, vemos dois exemplos nesse sentido.

Exemplo 1.28. Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$. Qual o valor mínimo que f assume? A função f assume um valor máximo?

Solução. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2-1+2}{x+1} \\ &= x-1+\frac{2}{x+1} = (x+1)+\frac{2}{x+1}-2. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando a desigualdade entre as médias para dois números, obtemos

$$(x+1)+\frac{2}{x+1} \geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{x+1}} = 2\sqrt{2},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $x+1 = \frac{2}{x+1}$, i.e., se, e só se, $x^2 + 2x - 1 = 0$. Mas, como $x \geq 0$, concluímos que haverá igualdade na desigualdade acima se, e só se, $x = \sqrt{2}-1$. Assim, para $x \geq 0$ temos

$$f(x) = (x+1)+\frac{2}{x+1}-2 \geq 2\sqrt{2}-2,$$

de sorte que $2\sqrt{2}-2$ é o valor mínimo de f, o qual é atingido se, e só se, $x = \sqrt{2}-1$.

Para o que falta observe que, para $n \in \mathbb{N}$, temos $f(n) = n - 1 + \frac{2}{n+1} \geq n-1$ e, daí, f não assume valor máximo. ■

Exemplo 1.29. Encontre o máximo da função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+16}$.

Solução. Novamente pela desigualdade entre as médias, temos

$$\begin{aligned} x^2+16 &= x^2+\frac{16}{3}+\frac{16}{3}+\frac{16}{3} \\ &\geq 4\sqrt[4]{x^2\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{16}{3}} = \frac{32}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{x}, \end{aligned}$$

e daí

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+16} \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{32}.$$

A igualdade ocorre se, e só se, $x^2 = \frac{16}{3}$, ou seja, se, e só se, $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (uma vez que $x \geq 0$). Assim, $\frac{\sqrt[4]{27}}{32}$ é o valor máximo de f. ■

Problemas – Seção 1.2

1. Para reais dados a e b, com $a \neq 0$, considere a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$. Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, prove que a sequência $(b_k)_{k\geq 1}$, dada para $k \geq 1$ inteiro por $b_k = f(a_k)$, é uma PA de razão ar.

2. Ache a imagem da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

3. * Ache a imagem da função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

4. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Se f é crescente (resp. decrescente) em $(-\infty, a] \cap I$ e decrescente (resp. crescente) em $[a, +\infty) \cap I$, então a é o único ponto de máximo (resp. de mínimo) para f em I.

5. * Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função dada e $c \in \mathbb{R}$ também dado. Relacione as imagens das funções f e $f + c$. Mais precisamente, se $Y = \mathrm{Im}\,(f)$, prove que $\mathrm{Im}\,(f + c) = Y + c$, onde $Y + c$ denota o conjunto

$$Y + c = \{y + c;\ y \in Y\}.$$

6. Motivados pela *forma canônica* do trinômio de segundo grau $ax^2 + bx + c$, diremos doravante que

$$f(x) = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right\} \qquad (1.5)$$

é a **forma canônica** da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Utilize tal forma canônica para dar uma outra demonstração da proposição 1.15.

7. Sejam $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática tal que $\Delta > 0$, e $x_1 < x_2$ as raízes de $f(x) = 0$. Prove os seguintes itens:

   (a) Se $a > 0$, então $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1, x_2)$.

   (b) Se $a < 0$, então $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \notin [x_1, x_2]$.

8. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Se existe um real x_0 tal que $af(x_0) < 0$, prove que $\Delta > 0$ e $x_0 \in (x_1, x_2)$, onde $x_1 < x_2$ são as raízes da equação $f(x) = 0$.

9. Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, prove que o de maior área é o quadrado.

10. A seção reta de um túnel tem o formato de um semicírculo de raio 5m, e o túnel está dividido em duas faixas de trânsito, de sentidos contrários, separadas por um canteiro muito estreito. Os caminhões de uma companhia de transportes têm de atravessar o túnel para levar mercadorias de uma cidade a outra. Se o comprimento máximo permitido de um caminhão é 18m, quais devem ser sua largura e altura a fim de que a companhia transporte o máximo possível de carga em cada caminhão?

11. Calcule o valor máximo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+1}$.

12. Sejam $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ reais dados e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| + \cdots + |x - \alpha_n|.$$

Prove que f assume um valor mínimo e calcule tal valor mínimo em função de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

13. Em cada um dos itens a seguir, use a desigualdade entre as médias para calcular o valor máximo da função dada:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{2x^2+3}$.

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}$.

   (c) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(1 - x^3)$.

14. Em cada um dos itens a seguir, use a desigualdade entre as médias para calcular o valor mínimo da função dada:

   (a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

   (b) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{(x+10)(x+2)}{x+1}$.

   (c) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$, onde a é um real positivo dado.

   (d) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2}{x^3+a}$.

   (e) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 6x + \frac{24}{x^2}$.

15. (Romênia.) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 - xy + y^2 \leq 2$. Mostre que $x^4 + y^4 \leq 8$ e explique quando ocorre a igualdade.

16. (Estados Unidos.) Encontre os valores reais de k para os quais a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{4x^2 + kx + k}{x + 1}$$

tenha como imagem a reta menos um intervalo da forma $(-L, L)$.

17. (Torneio das Cidades.) Ache todos os x, y, z, t reais tais que

$$\begin{cases} y = x^3 + 2x \\ z = y^3 + 2y \\ t = z^3 + 2z \\ x = t^3 + 2t \end{cases}.$$

Para o problema a seguir o leitor pode achar conveniente recordar a discussão sobre o mdc de dois inteiros no início do capítulo 1 do volume 1. Para um tratamento mais completo, veja a seção 1.2 do volume 5.

18. (OCM.) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que $f(mn) = f(m) + f(n)$ sempre que m e n forem primos entre si. Um natural m é dito um *ponto de estrangulamento* de f se $n < m \Rightarrow f(n) < f(m)$ e $n > m \Rightarrow f(n) > f(m)$. Se f possui infinitos pontos de estrangulamento, mostre que ela é crescente.

1.3 Composição de funções

Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ temos, em última análise, regras bem definidas para, partindo de $x \in X$ via f, obter $y = f(x) \in Y$ e, via g, obter $z = g(y) \in Z$. Parece, então, razoável que possamos formar uma função que nos permita sair de X diretamente para Z. Este é de fato o caso, e a função resultante é denominada a função *composta* de f e g, de acordo com a seguinte

Definição 1.30. Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, a **função composta** de f e g (nessa ordem) é a função $g \circ f : X \to Z$ definida, para cada $x \in X$, por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Grosso modo, a definição acima significa que, para encontrarmos a imagem de $x \in X$ por $g \circ f$, basta encontrarmos a imagem de $f(x) \in Y$ por g. É fácil verificar que $g \circ f$, como definida acima, é de fato uma função. Observe também que, para formarmos a composta de f e g, devemos ter o domínio de g igual ao contradomínio de f. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.31. Se $f : X \to Y$ é uma função arbitrária e $\text{Id}_X : X \to X$ e $\text{Id}_Y : Y \to Y$ são, respectivamente, as funções identidade de X e Y, então

$$f \circ \text{Id}_X = f \quad \text{e} \quad \text{Id}_Y \circ f = f.$$

Verifiquemos a igualdade $f \circ \text{Id}_X = f$, sendo a outra totalmente análoga. Para tanto, basta notarmos que $f \circ \text{Id}_X$ é uma função de X em Y tal que, para todo $x \in X$,

$$(f \circ \text{Id}_X)(x) = f(\text{Id}_X(x)) = f(x).$$

Exemplo 1.32. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Temos $g \circ f$ e $f \circ g$ funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(f(x))^2 + 1} = \frac{1}{(x^2)^2 + 1} = \frac{1}{x^4 + 1}$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2 = \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1}.$$

O exemplo acima mostra algo interessante: podemos ter $g \circ f \neq f \circ g$. Bem entendido, pode mesmo acontecer que possamos formar $g \circ f$ mas não $f \circ g$ (ou vice-versa); basta termos, por exemplo, $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, com $X \neq Z$. Contudo, mesmo que possamos formar ambas as funções, o exemplo mostra que, ainda assim, pode ocorrer que $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemplo 1.33. Sejam $f, g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ funções tais que

$$f(x) = \frac{x^2+1}{3x^2} \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = \frac{x+2}{3}.$$

Encontre a expressão da função g.

Solução. Segue da definição de composta que

$$\frac{x+2}{3} = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)^2+1}{3g(x)^2},$$

de modo que $\frac{g(x)^2+1}{3g(x)^2} = \frac{x+2}{3}$ ou, ainda,

$$3g(x)^2 + 3 = 3(x+2)g(x)^2.$$

Olhando essa expressão como uma equação do primeiro grau em $g(x)^2$, obtemos $g(x)^2 = \frac{1}{x+1}$ e, daí, $g(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, para cada $x > 0$. Mas, como g deve ter imagem não negativa, deve ser $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, para todo $x > 0$. ■

Apesar de não ser comutativa, a operação de composição de funções é associativa, conforme ensina a seguinte

Proposição 1.34. Dadas funções $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ e $h : Z \to W$, temos

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Prova. Veja primeiro que ambas $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$ são funções de X em W. Portanto, para serem iguais, é suficiente que associem, a cada $x \in A$, um mesmo elemento de W. Para ver isto, basta notar que

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h((g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).\end{aligned}$$

■

A proposição acima é muito importante, na medida em que nos assegura que, se tivermos funções f, g e h e pudermos compô-las (nessa ordem), podemos denotar a função composta por $h \circ g \circ f$ simplesmente, não nos preocupando com qual composição efetuar primeiro. É também claro que vale uma observação análoga para mais de três funções.

Exemplo 1.35. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ a função dada por $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, encontre a expressão que define a função

$$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}.$$

Solução. Veja primeiro que $f^{(n)} : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Agora

$$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)} = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x,$$

isto é, $f^{(2)} = \mathrm{Id}_X$, a função identidade de $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Segue daí que

$$f^{(3)} = f \circ f^{(2)} = f \circ \mathrm{Id}_X = f \quad \text{e} \quad f^{(4)} = f \circ f^{(3)} = f \circ f = \mathrm{Id}_X.$$

Em geral, se já mostramos que $f^{(2k-1)} = f$ e $f^{(2k)} = \mathrm{Id}_X$, temos que

$$f^{(2k+1)} = f \circ f^{(2k)} = f \circ \mathrm{Id}_X = f$$

e

$$f^{(2k+2)} = f \circ f^{(2k+1)} = f \circ f = \mathrm{Id}_X.$$

Logo, segue por indução que $f^{(n)} = f$ quando n for ímpar e $f^{(n)} = \mathrm{Id}_X$ quando n for par. ■

Dada uma função $f : X \to Y$, já vimos exemplos que mostram que nem sempre a imagem de f é igual ao contradomínio Y. Por outro lado, também podemos ter dois elementos distintos no domínio com

a mesma imagem. Para um exemplo, considere a função de segundo grau $f(x) = x^2$; para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$. Emprestamos nomes especiais às funções cujos contradomínios coincidem com suas imagens, ou que associam imagens distintas a elementos distintos do domínio, conforme ensina a seguinte

Definição 1.36. Uma função $f : X \to Y$ é dita:

(a) **Injetora**, ou **injetiva** ou, ainda, uma **injeção**, se, para todo $y \in Y$, existir no máximo um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

(b) **Sobrejetora**, ou **sobrejetiva** ou, ainda, uma **sobrejeção**, se sua imagem for todo o conjunto Y, i.e., se, para todo $y \in Y$, existir pelo menos um $x \in X$, tal que $y = f(x)$.

(c) **Bijetora**, ou **bijetiva** ou, ainda, uma **bijeção**, se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

Um modo eficiente de verificar se uma função $f : X \to Y$ é injetora é verificar se a implicação

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \tag{1.6}$$

é satisfeita, para todos $x_1, x_2 \in X$. Da mesma forma, para garantirmos que f é sobrejetora, devemos ser capazes de, para cada $y \in Y$, obter pelo menos uma solução $x \in X$ para a equação $f(x) = y$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.37. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e $f : X \to X$ é uma função tal que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então f é bijetiva.

Prova. Sejam x_1 e x_2 números reais tais que $f(x_1) = f(x_2)$. De acordo com (1.6), para mostrarmos que f é injetiva é suficiente provar que $x_1 = x_2$. Para tanto, observe que $f(x_1) = f(x_2)$ implica $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ e, daí, em $x_1 = x_2$ pela hipótese.

A sobrejetividade de f é imediata: fixado $y \in X$ e tomando $x = f(y) \in X$, temos $f(x) = f(f(y)) = y$ e, daí, $y \in \text{Im}\,(f)$. ■

Segue, em particular, do exemplo anterior que a função de proporcionalidade inversa (cf. exemplo 1.13) é uma bijeção de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ em si mesmo.

Exemplo 1.38. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função sobrejetora, tal que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ para todos $x_1, x_2 \in [0,1]$. Prove que há somente duas possibilidades: ou $f(x) = x$, para todo $x \in [0,1]$ ou $f(x) = 1 - x$, para todo $x \in [0,1]$.

Prova. Sejam $a, b \in [0,1]$ tais que $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$ (tais a e b existem por estarmos supondo que f é sobrejetora). Então, temos por hipótese que

$$1 = |1 - 0| = |f(b) - f(a)| \leq |b - a| \leq 1,$$

de modo que $|b - a| = 1$. Mas, os únicos $a, b \in [0,1]$ tais que $|b - a| = 1$ são $a = 0$, $b = 1$ ou vice-versa. Suponha que $a = 0$ e $b = 1$ (o outro caso pode ser analisado de modo análogo), e tome $c \in (0,1)$ arbitrário. Então, segue da desigualdade triangular (equação (7.1) do volume 1) e da hipótese sobre f que

$$\begin{aligned} 1 &= |f(1) - f(0)| \\ &\leq |f(1) - f(c)| + |f(c) - f(0)| \\ &\leq |1 - c| + |c - 0| \\ &= (1 - c) + c = 1 \end{aligned}$$

e, daí, deve ser $|f(c) - f(0)| = |c - 0|$. Mas, como $c, f(c) \geq 0$, segue que $f(c) = c$. Por fim, a arbitrariedade do $c \in [0,1]$ escolhido garante que $f(x) = x$, para todo $x \in [0,1]$. ■

A proposição a seguir ensina como se comportam funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras em relação à composição.

Proposição 1.39. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções dadas. Então:

(a) $g \circ f$ injetora $\Rightarrow f$ injetora, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

(b) $g \circ f$ sobrejetora $\Rightarrow g$ sobrejetora, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

(c) g, f injetoras $\Rightarrow g \circ f$ injetora.

(d) g, f sobrejetoras $\Rightarrow g \circ f$ sobrejetora.

(e) g, f bijetoras $\Rightarrow g \circ f$ bijetora.

Prova.
(a) Para x_1 e x_2 em X, temos que

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

onde, na última passagem, utilizamos o fato de $g \circ f$ ser injetora. Temos agora que dar um exemplo no qual f seja injetora mas $g \circ f$ não o seja. Para tanto, basta tomarmos $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.

(b) Escolhido arbitrariamente $z \in Z$, a sobrejetividade de $g \circ f$ garante a existência de pelo menos um $x \in X$ tal que $z = (g \circ f)(x)$. Mas, daí, $z = g(f(x))$, de sorte que g também é sobrejetora. Para o exemplo necessário à segunda parte, tomemos novamente $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $g(x) = x$ e $f(x) = x^2$.

(c) Utilizando sucessivamente as injetividades de g e f, temos, para x_1 e x_2 em X, que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

e $g \circ f$ também é injetora.

(d) Escolhido arbitrariamente $z \in Z$, a sobrejetividade de g garante a existência de $y \in Y$ tal que $z = g(y)$. Por outro lado, a sobrejetividade de f assegura a existência de $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Então, temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z,$$

de modo que $g \circ f$ também é sobrejetiva.

(e) Segue dos itens (c) e (d) que

$$\begin{aligned} g \text{ e } f \text{ bijetoras} &\Rightarrow g \text{ e } f \text{ injetoras e sobrejetoras} \\ &\Rightarrow g \circ f \text{ injetora e sobrejetora} \\ &\Rightarrow g \circ f \text{ bijetora.} \end{aligned}$$

■

Revisitemos o exemplo 1.37 à luz da proposição acima.

Exemplo 1.40. Sejam X um conjunto não vazio e $f : X \to X$ uma função tal que $f \circ f = \mathrm{Id}_X$, então f é bijetora.

Solução. De fato, como a função identidade $\mathrm{Id}_X : X \to X$ é uma bijeção, segue dos itens (a) e (b) da proposição anterior que f é injetora e sobrejetora, logo bijetora. ■

Problemas – Seção 1.3

1. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Encontre a expressão que define a função f.

2. Considere as funções reais de uma variável real f e g, dadas por $f(x) = x - \frac{7}{2}$ e $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}$. Encontre o conjunto-solução da inequação $|(g \circ f)(x)| > (g \circ f)(x)$.

3. Sejam f e g funções reais de uma variável real, tais que $f(x) = 2x + 7$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$. Encontre a expressão que define a função g.

4. Sejam f e g as funções reais de uma variável real dadas por $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, com $ac \neq 0$. Mostre que
$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow (a-1)d = (c-1)b.$$

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x+b}, & \text{se } x \neq -b \\ -1, & \text{se } x = -b \end{cases}.$$
Se $f(f(x)) = x$ para todo x real, calcule o valor de ab.

6. * Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função crescente ou decrescente, prove que f é injetiva.

7. Sejam $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$ intervalos e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funções dadas. Se f e g forem crescentes (resp. decrescentes), prove que $g \circ f$ também é crescente (resp. decrescente).

8. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que
$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{e} \quad f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right),$$
para todo real $x \neq 0$. Se u e v são reais não nulos, tais que $u^2 + v^2 = 1$ e $f\left(\frac{1}{uv}\right) = 2$, calcule o valor de $f\left(\frac{u}{v}\right)$.

9. Dada uma função $f : X \to Y$, definimos seu *gráfico* como o subconjunto G_f do produto Cartesiano $X \times Y$ dado por
$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}.$$
Se $F : X \to G_f$ é a função definida para $x \in X$ por $F(x) = (x, f(x))$, prove que F é uma bijeção.

10. * Se $I \subset \mathbb{R}$ é uma união de intervalos, simétrica em relação a $0 \in \mathbb{R}$, dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **par** (resp. **ímpar**) se $f(x) = f(-x)$ (resp. $f(x) = -f(-x)$), para todo $x \in I$. Prove que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita, de uma única maneira, como a soma de uma função par e uma ímpar.

11. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$, para todos os reais não nulos a e b. Prove que f é uma função par.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar. Decida se a função $f \circ f$ é par, ímpar, ou nem par nem ímpar.

13. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar, tal que $g(x) > 0$ para $x > 0$. Mostre que existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g = f \circ f$.

14. (Itália.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para todo real x, tenhamos $f(10 + x) = f(10 - x)$ e $f(20 + x) = -f(20 - x)$. Prove que f é ímpar e encontre $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

15. * Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **periódica** se existe um menor real positivo p, denominado o **período** de f, tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dada uma função periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de período $p > 0$, faça os seguintes itens

    (a) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também periódica de período p. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [0, p)$, prove que $f = g$.

(b) Dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, prove que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(ax)$ é periódica de período $\frac{p}{|a|}$.

16. (IMO - adaptado.) Seja $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ uma função tal que, para um certo $a \in \mathbb{R}$, tenhamos

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que f é **periódica**, i.e., que existe um real $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

17. (OBM.) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = x - 10$ para $x > 100$ e $f(x) = f(f(x + 11))$ para $x \leq 100$. Encontre a imagem de f.

18. (Hungria.) Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo as condições a seguir:

 (a) $f(1) = 2$.

 (b) $f(2n) = 2f(n) + 1$.

 (c) $f(f(n)) = 4n + 1$.

 Calcule $f(1993)$.

19. Dê um exemplo de uma função sobrejetora $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x \in \mathbb{N};\ f(x) = n\}$ seja infinito.

20. (OIMU.) Sejam c e α reais positivos dados e Q um quadrado no plano, também dado. Prove que não existe função sobrejetiva $f : [0, 1] \to Q$ tal que, para todos $0 \leq x, y \leq 1$, tenhamos

$$d(f(x), f(y)) \leq c|x - y|^{\alpha + 1/2},$$

onde, para pontos A e B do plano, denotamos $d(A, B) = \overline{AB}$.

1.4 Inversão de funções

Dentre todas as funções $f : X \to Y$, o caso de uma bijeção é o melhor possível. Realmente, nesse caso os elementos de X e Y estão em *correspondência biunívoca*, ou seja, a cada elemento de X corresponde um único elemento de Y via f, e vice-versa. Quando isso ocorre, podemos obter uma outra função $g : Y \to X$, simplesmente exigindo que

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Uma pergunta natural a esta altura é a seguinte: por que não podemos usar a declaração acima para definir a inversa de uma função bijetiva? De um ponto de vista intuitivo, se f não fosse sobrejetiva, existiria um elemento y de Y que não seria imagem por f de nenhum elemento de X; assim, não teríamos uma maneira natural de definir $g(y)$ a partir de f. Por outro lado, se f não fosse injetiva, existiriam elementos distintos x_1 e x_2 em X com uma mesma imagem $y \in Y$ via f; quando tentássemos definir g por meio de f, também não haveria maneira natural de decidirmos qual, dentre x_1 e x_2, deveria ser igual a $g(y)$.

Voltando ao caso em que f é bijetiva, não é difícil ver que g, definida como acima, é de fato uma função, ademais tal que $(g \circ f)(x) = x$, para todo $x \in X$, e $(f \circ g)(y) = y$, para todo $y \in Y$. De outro modo, temos $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Reciprocamente, se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são funções tais que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, então a proposição 1.39 garante que f deve realmente ser uma bijeção, e o problema 1 garante que g é a *única* função que satisfaz tais igualdades de composição.

Resumimos a discussão acima na definição a seguir.

Definição 1.41. Seja $f : X \to Y$ uma bijeção dada. A **função inversa** de f é a função $g : Y \to X$ tal que, para $x \in X$, $y \in Y$,

temos

$$g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Daqui em diante, denotaremos a inversa de uma bijeção $f : X \to Y$ por $f^{-1} : Y \to X$. Observe que o *expoente* -1 na notação de função inversa não tem nenhum significado aritmético; ele simplesmente chama atenção para o fato de que f^{-1} *faz o caminho inverso de* f, i.e., aplica Y em X em vez de X em Y, *revertendo as setas* das associações feitas por f.

Surge, agora, naturalmente, a questão de como calcular *efetivamente* a inversa de uma bijeção. Um tal cálculo é, em geral, mais complicado que o de funções compostas. Entretanto, para funções reais de uma variável real $f : X \to Y$, podemos raciocinar da seguinte maneira: fixado $y \in Y$, como $f^{-1}(y) = x$ se, e só se, $f(x) = y$, a fim de explicitar $f^{-1}(y) = x$ basta resolvermos, para $x \in X$, a equação $f(x) = y$. Vejamos, inicialmente, alguns exemplos relevantes.

Exemplo 1.42. Sejam a e b reais dados, sendo $a \neq 0$, e considere a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$. Mostre que f é uma bijeção e calcule tal inversa.

Prova. Note inicialmente que

$$f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}.$$

Por outro lado, a definição de f^{-1} exige que tal valor de x deve ser exatamente igual a $f^{-1}(y)$, de maneira que

$$f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}.$$

■

Exemplo 1.43. Uma discussão análoga à do exemplo acima garante que a inversa da função identidade Id_X do conjunto $X \neq \emptyset$ é ela

mesma, i.e, que $(\mathrm{Id}_X)^{-1} = \mathrm{Id}_X$. No entanto, a inversa de uma função pode ser ela mesma sem que a função seja a identidade; um exemplo é fornecido pela função de proporcionalidade inversa $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (a qual já sabemos ser bijetiva). De fato, como

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y},$$

concluímos que

$$f^{-1}(y) = x = \frac{1}{y},$$

e daí $f^{-1} = f$.

Exemplo 1.44. Se a, b e c são reais dados, com $a > 0$, as proposições 1.15 e 1.23 garantem que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, vista como função

$$f : \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right) \to \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right),$$

é uma bijeção. Calcule a expressão de sua invera.

Solução. De acordo com a discussão que precedeu o exemplo 1.42, a fim de obter a expressão da inversa $f^{-1} : \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right) \to \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ de f, devemos fixar $y \in \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ e resolver, para $x \in \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, a equação $f(x) = y$, isto é, a equação $ax^2 + bx + c - y = 0$. Ao fazê-lo, a condição $x \geq -\frac{b}{2a}$ garante (lembre-se de que $a > 0$) que

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta + 4ac}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante de f. Logo,

$$f^{-1}(y) = \frac{-b + \sqrt{\Delta + 4ay}}{2a}.$$

■

Exemplo 1.45. Como caso particular do exemplo anterior[4], a função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^2$ é uma bijeção, tendo como inversa a **função raiz quadrada**

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [0,+\infty) & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Terminemos esta seção explicitando uma relação útil entre composição e inversão de funções.

Proposição 1.46. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções bijetoras, então $g \circ f : X \to Z$ é bijetora e

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Prova. Já sabemos, pelo item (e) da proposição 1.39, que $g \circ f$ é bijetora. Por outro lado, como $(g \circ f)^{-1}$ e $f^{-1} \circ g^{-1}$ são ambas funções de Z em X, a fim de verificar que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ é suficiente, pela unicidade da inversa (cf. problema 1), mostrar que

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{Id}_X \quad \text{e} \quad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{Id}_Z.$$

Mas tal verificação é imediata e será deixada a cargo do leitor. ■

Problemas – Seção 1.4

1. * Seja $f : X \to Y$ uma função dada.
   (a) Se $g : Y \to X$ é uma função tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, prove que f é uma bijeção.

[4] Aqui e no exemplo anterior estamos nos apoiando no conhecimento anterior do leitor. A rigor, a discussão apresentada só pode ser rigorosamente justificada com a introdução do conceito de função contínua, o que faremos no capítulo 4. A esse respeito, veja também o exemplo 4.22.

   (b) Prove que existe no máximo uma função $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$.

2. Seja $f : [\frac{1}{2}, +\infty) \to [\frac{3}{4}, +\infty)$ a função definida por $f(x) = x^2 - x + 1$. Mostre que f é uma bijeção e obtenha a expressão para sua inversa.

3. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ a função definida por $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$. Mostre que f é uma bijeção e obtenha a expressão para sua inversa.

4. * Sejam n um inteiro positivo e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x^n$. Prove que f é uma bijeção se, e só se, n for ímpar. Nesse caso, calcule a expressão da inversa de f.

5. * Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : X \to X$ uma bijeção. Se f for crescente (resp. decrescente), prove que f^{-1} também será crescente (resp. decrescente).

6. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma bijeção e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a função definida por $g(x, y) = (x^3, x - f(y))$. Prove que g é bijetora e encontre a expressão de sua inversa em termos da função inversa f^{-1} de f.

7. (IMO.) Seja G um conjunto (não vazio) de funções afins, possuindo as seguintes propriedades:
   (a) Se $f, g \in G$, então $f \circ g \in G$.
   (b) Se $f \in G$, então $f^{-1} \in G$.
   (c) Para toda $f \in G$, existe $x_f \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_f) = x_f$.

   Prove que existe um real x_0 tal que $f(x_0) = x_0$ para toda $f \in G$.

8. (França.) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção. Prove que existem naturais $a < b < c$ tais que $f(a) + f(c) = 2f(b)$.

1.5 Funções definidas implicitamente

Uma função pode ser definida implicitamente por um conjunto de propriedades. Por exemplo, sendo $g(x) = x + 1$ e $h(x) = x - 1$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é tal que

$$f(g(x)) = g(x)^2 \quad \text{e} \quad f(h(x)) = h(x)^2,$$

ou seja, ela é tal que

$$f(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1 \quad \text{e} \quad f(x+1) = (x-1)^2 = x^2-2x+1.$$

Daí, temos que a função acima satisfaz, para todo $x \in \mathbb{R}$, a relação

$$f(x+1) - f(x-1) = 4x.$$

Podemos tentar reverter os passos acima, perguntando agora quais são as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x+1) - f(x-1) = 4x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

É claro que a função $f(x) = x^2$ não é a única, pois, como é fácil verificar, para qualquer constante real c a função $f_c(x) = x^2 + c$ também satisfaz (1.7).

Como uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo (1.7) não está dada por seus valores, e sim por uma relação que deve satisfazer, dizemos que a função está *definida implicitamente*. Note que, a partir de (1.7), podemos descobrir outras relações que a função satisfaz. Por exemplo, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x^2$, temos

$$f(g(x)+1) - f(g(x)-1) = 4g(x)$$

ou, ainda,

$$f(x^2+1) - f(x^2-1) = 4x^2, \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Assim, qualquer função que satisfizer (1.7) também satisfará (1.8). Entretanto, a relação (1.8) pode não ser muito útil para ajudar a determinar as funções f que satisfazem (1.7). Só a experiência dirá que relações obtidas a partir de uma relação inicialmente dada serão úteis nesse sentido.

Em geral, um problema interessante é o de encontrar todas as funções definidas implicitamente por um certo conjunto de relações dadas. Uma vez que não há uma teoria geral a esse respeito, no que segue, veremos alguns exemplos que ilustram um certo número de técnicas úteis no trato de funções definidas implicitamente.

Exemplo 1.47 (Canadá). Ache todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, crescentes e tais que $f(2) = 2$ e $f(mn) = f(m)f(n)$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

Solução. De $1 \leq f(1) < f(2) = 2$ obtemos $f(1) = 1$. Agora $f(4) = f(2)f(2) = 4$ e $f(8) = f(4)f(2) = 8$. Suponha pois, por hipótese de indução, que $f(2^k) = 2^k$ para um certo natural k. Então

$$f(2^{k+1}) = f(2^k)f(2) = 2^k \cdot 2 = 2^{k+1},$$

e segue que $f(2^n) = 2^n$ para todo inteiro não negativo n. Portanto, fixado n natural, segue de f ser crescente que

$$2^n = f(2^n) < f(2^n+1) < \cdots < f(2^{n+1}-1) < f(2^{n+1}) = 2^{n+1}.$$

Mas, uma vez que $f(2^n+1)$, $f(2^n+2)$, ..., $f(2^{n+1}-1)$ são naturais, a única possibilidade é termos

$$f(2^n+1) = 2^n+1, \ f(2^n+2) = 2^n+2, \ \ldots, \ f(2^{n+1}-1) = 2^{n+1}-1.$$

Finalmente, como esse raciocínio é válido para todo n natural, segue que $f(m) = m$ para todo m natural. ■

Exemplo 1.48 (OIM). Se $D = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, encontre todas as funções $f : D \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in D$, tenhamos

$$f(x)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x.$$

Solução. Note antes de tudo que, como $x \neq 0$, temos $f(x)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \neq 0$ para todo $x \in D$. Em particular, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in D$. Seja agora $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$ para $x \in D$. A definição de D garante facilmente que $g(D) \subset D$, de modo que podemos compor f com g. Assim, para todo $x \in D$, temos

$$f(g(x))^2 f\left(\frac{1-g(x)}{1+g(x)}\right) = 64g(x). \tag{1.9}$$

Substituindo a expressão de g na relação acima, chegamos a

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) f\left(\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}\right) = 64\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

ou, ainda,

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 f(x) = 64\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

para todo $x \in D$. Elevando ao quadrado ambos os membros da relação do enunciado e dividindo o resultado pela relação acima, obtemos

$$f(x)^3 = 64x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

e, daí, $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$.

Até este ponto, mostramos apenas que, se f existir, deve ser dada por essa expressão. Temos, pois, de verificar que f, assim definida, realmente satisfaz a relação do enunciado para todo $x \in D$. Mas tal verificação é imediata e será deixada a cargo do leitor. ■

Ainda em relação ao exemplo anterior, com um pouco mais de prática poderíamos prescindir de definir a função g para em seguida compô-la com f a fim de obter (1.9). Ao invés disso, poderíamos apenas ter dito

Substituindo x por $\frac{1-x}{1+x}$ na relação do enunciado, obtemos ...,

tendo em mente que essa *substituição* é meramente uma composição de funções. Doravante, sempre que não houver perigo de confusão, adotaremos essa simplificação de linguagem, a qual já aparece no exemplo a seguir. Ao lê-lo, tente identificar as composições que foram mascaradas por substituições.

Exemplo 1.49 (Polônia). Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tenhamos

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2-y^2).$$

Solução. Como essa relação deve ser válida para todos os $x, y \in \mathbb{R}$, ela deve ser válida se fizermos $x = \frac{a+b}{2}$ e $y = \frac{a-b}{2}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Substituindo esses valores de x e y na relação do enunciado chegamos à relação

$$bf(a) - af(b) = (a^2-b^2)ab,$$

a qual deve ser satisfeita para todos $a, b \in \mathbb{R}$. Em particular, quando $ab \neq 0$, dividindo ambos os membros dessa relação por ab segue que devemos ter

$$\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b} = a^2 - b^2,$$

para todos $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, sendo $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função dada por $g(x) = \frac{f(x)}{x} - x^2$, a relação acima diz que $g(a) = g(b)$, para todos $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em outras palavras, g deve ser constante, isto é, deve existir um real k tal que $g(x) = k$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mas isso é o mesmo que ser $f(x) = x^3 + kx$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por outro lado, fazendo $x = y = 1$ na relação do enunciado, obtemos $f(0) = 0$ para qualquer função que satisfaça aquelas condições. Como $0^3 + k \cdot 0 = 0$, concluímos que qualquer função que satisfaça as condições do enunciado deve ser da forma $f(x) = x^3 + kx$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Novamente temos de verificar que toda função desse tipo satisfaz as condições do enunciado, o que é imediato e será, uma vez mais, deixado a cargo do leitor. ■

Para o próximo exemplo precisamos da seguinte

Definição 1.50. Se X é um conjunto não vazio e $f : X \to X$ é uma função dada, um elemento $x_0 \in X$ é dito um **ponto fixo** de f se $f(x_0) = x_0$.

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, uma função decrescente $f : I \to I$ admite no máximo um ponto fixo. De fato, se $x_1, x_2 \in I$ fossem pontos fixos de f, com $x_1 < x_2$, seguiria de f ser decrescente que

$$x_1 = f(x_1) > f(x_2) = x_2,$$

uma contradição à hipótese $x_1 < x_2$.

Exemplo 1.51 (Argentina). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função decrescente e tal que $f(x+f(x)) = x+f(x)$ para todo real x. Prove que $f(f(x)) = x$ para todo real x.

Prova. As hipóteses sobre f garantem que $x + f(x)$ é ponto fixo de f para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, o caráter decrescente de f garante, de acordo com a discussão anterior, a existência de no máximo um ponto fixo para f, de sorte que deve existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $x + f(x) = a$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que é o mesmo que $f(x) = a - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto

$$f(f(x)) = f(a - x) = a - (a - x) = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

O próximo exemplo desenvolve ideias úteis em muitas outras situações, e a primeira parte do argumento que apresentamos a seguir resolve o problema 8, página 14.

Exemplo 1.52. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(1) = 1$ e, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tenhamos

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(b) $f(xy) = f(x)f(y)$.

Solução. Seja f uma função satisfazendo as condições do enunciado. Fazendo $x = y = 0$ em (a), obtemos

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0),$$

de modo que segue que $f(0) = 0$. Fazendo $y = x$ em (a), obtemos

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo agora $y = 2x$ em (a), segue que

$$f(3x) = f(x + 2x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Repetindo o argumento acima concluímos, por indução sobre $n \in \mathbb{N}$, que

$$f(nx) = nf(x), \ \forall\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

Em particular, fazendo $x = 1$ em (1.10), obtemos $f(n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo agora $x = \frac{1}{n}$ em (1.10), segue que

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

de modo que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Finalmente, $x = \frac{1}{m}$ em (1.10), com $m \in \mathbb{N}$, fornece

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(n \cdot \frac{1}{m}\right) = nf\left(\frac{1}{m}\right) = n \cdot \frac{1}{m} = \frac{n}{m}.$$

Vamos ver o que ocorre com os racionais negativos. Para isso, façamos $y = -x$ no item (a), obtendo

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

ou ainda
$$f(x) = -f(-x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}. \qquad (1.11)$$

Em particular, sendo $x < 0$ racional, segue de (1.11) e do fato de ser $-x$ um racional positivo que $f(x) = -f(-x) = -(-x) = x$; portanto, $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Como $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, desconfiamos que a função identidade seja a única satisfazendo as condições do enunciado. Para confirmar tal suposição, voltemos nossa atenção à condição do item (b). Inicialmente, mostremos que se para um certo $x \in \mathbb{R}$ tivermos $f(x) = 0$, então $x = 0$. De fato, caso fosse $x \neq 0$, fazendo $y = \frac{1}{x}$ em (b) teríamos

$$0 = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(1) = 1,$$

o que é uma contradição. Agora, fazendo $y = x \neq 0$ em (b), obtemos

$$f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) \cdot f(x) = f(x)^2 > 0; \qquad (1.12)$$

portanto, se $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, e $a \neq 0$ for tal que $y - x = a^2$, então, aplicando sucessivamente (a), (1.11) e (1.12), obtemos

$$f(y) - f(x) = f(y) + f(-x) = f(y - x) = f(a^2) = f(a)^2 > 0,$$

de sorte que f é crescente. Suponha, por fim, que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < a$ e tome (cf. problema 1.5.2, volume 1) um racional r tal que $f(a) < r < a$; o caráter crescente de f fornece

$$r = f(r) < f(a),$$

o que é uma contradição. Analogamente, não podemos ter $f(a) > a$, e a única possibilidade é $f(a) = a$. Mas, como $a \in \mathbb{R}$ foi escolhido arbitrariamente, devemos ter $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Nosso último exemplo mostra que, para funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, argumentos elementares de divisibilidade serão por vezes úteis.

Exemplo 1.53 (Lituânia). Encontre todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que, para todos os naturais m e n, tenhamos

$$f(f(m) + f(n)) = m + n.$$

Solução. Provemos primeiramente que f é injetiva. Para tanto, sejam m e n naturais tais que $f(m) = f(n) = k$. Então $f(2k) = f(f(n) + f(n)) = 2n$ e, analogamente, $f(2k) = 2m$, de modo que deve ser $m = n$.

Seja agora $k > 1$ natural. De $(k - 1) + 2 = k + 1$, segue que

$$f(f(k - 1) + f(2)) = k + 1 = f(f(k) + f(1)).$$

Pela injetividade de f, temos então $f(k - 1) + f(2) = f(k) + f(1)$ ou, ainda, $f(k) - f(k - 1) = f(2) - f(1)$, para todo natural $k > 1$. Escrevendo essa relação para $k = 2, 3, \ldots, n$ e somando as igualdades assim obtidas, chegamos a

$$f(n) = (n - 1)(f(2) - f(1)) + f(1),$$

para todo natural $n > 1$. Fazendo $n = 2f(1)$ na relação acima, segue então que

$$2 = f(f(1) + f(1)) = f(2f(1)) = (2f(1) - 1)(f(2) - f(1)) + f(1)$$

ou, ainda,
$$f(2) - f(1) = \frac{2 - f(1)}{2f(1) - 1}.$$

Mas $f(2) - f(1)$ é inteiro, de modo que $2f(1) - 1$ divide $2 - f(1)$. Assim, deve ser $2f(1) - 1 \leq |2 - f(1)|$ e é fácil concluir, a partir daí, que a única possibilidade é $f(1) = 1$, de modo que $f(2) = 2$. Segue então que $f(n) = n$, para todo n natural. ■

Problemas – Seção 1.5

1. * Generalize a discussão do parágrafo anterior ao exemplo 1.51, mostrando que, se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f, g : I \to I$ são funções tais que f é decrescente e g é crescente, então existe no máximo um $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

2. Ache todos os reais positivos x para os quais $\sqrt{2 + \sqrt{x}} = \frac{8}{x}$.

3. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tais que
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$
para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

4. (Áustria.) Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ para os quais $x + y$ seja múltiplo de 3, tenhamos
$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

5. (Vietnã.) Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4},$$
para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$.

6. (Espanha.) Encontre todas as funções crescentes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $f(n + f(n)) = 2f(n)$.

7. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tais que:
   (a) $f(x + a) = f(x) + a$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $a \in \mathbb{Z}$.
   (b) $f(f(x)) = 0$ para $x \in [0, 1)$.

8. (Áustria-Polônia.) Prove que não existe função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$, tenhamos
$$f(x + f(y)) = f(x) - y.$$

9. (Romênia.) Ache todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que $f(0) = 1$ e
$$f(f(k)) + f(k) = 2k + 3,$$
para todo $k \in \mathbb{Z}$.

10. (Romênia.) Sejam $k > 1$ um inteiro ímpar e $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ um conjunto de k números reais. Obtenha todas as funções injetivas $f : A \to A$ tais que
$$|f(x_1) - x_1| = |f(x_2) - x_2| = \cdots = |f(x_k) - x_k|.$$

11. Sejam a um real dado e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = \frac{1}{2}$ e, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tenhamos
$$f(x + y) = f(x)f(a - y) + f(y)f(a - x).$$
Prove que f é constante.

12. Ache todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+^*$ tais que $f(x+y) = f(x)f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

13. Ache todas as funções $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tais que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e
$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x),$$
para todos os $x, y \in [0, 1]$ tais que $x - y, x + y \in [0, 1]$.

14. (Lituânia.) Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que $f(m^2 + f(n)) = f(m)^2 + n$, para todos m, n inteiros.

(a) Prove que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

(b) Ache todas tais funções.

15. (OIM.) Encontre todas as funções crescentes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tais que $f(yf(x)) = x^2 f(xy)$, para todos $x, y \in \mathbb{N}$.

16. (IMO.) Ache todas as funções $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as duas condições a seguir:

    (a) $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$, para todos $x, y \in [0, +\infty)$.

    (b) $f(2) = 0$ e $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$.

17. (IMO.) Seja $S = \{x \in \mathbb{R};\ x > -1\}$. Obtenha todas as funções $f : S \to S$ que satisfaçam as duas condições a seguir:

    (a) $f(x+f(y)+xf(y)) = y+f(x)+yf(x))$, para todos $x, y \in S$.

    (b) $\frac{f(x)}{x}$ é crescente em cada um dos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, +\infty)$.

18. (IMO.) Decida se existe uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo as condições a seguir:

    (a) $f(1) = 2$.

    (b) $f(n) < f(n + 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (c) $f(f(n)) = f(n) + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

19. (Irã.) Obtenha todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos x, y reais, tenhamos

$$f(f(x + y)) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy.$$

20. (Polônia.) Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ satisfazendo, para todo racional positivo x, as seguintes condições:

    (a) $f(x + 1) = f(x) + 1$.

    (b) $f(x^3) = f(x)^3$.

CAPÍTULO 2

Gráficos de Funções

Dada uma função $f : X \to Y$, o **gráfico** de f é o subconjunto G_f do produto Cartesiano $X \times Y$ definido por

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}. \tag{2.1}$$

Quando $f : X \to \mathbb{R}$ for uma função real de variável real, com $X \subset \mathbb{R}$ uma união finita de intervalos (possivelmente $X = \mathbb{R}$), o gráfico de f se reveste de significativa importância geométrica, uma vez que

$$G_f \subset X \times Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

e esse último conjunto pode ser identificado com o plano, munido de um sistema Cartesiano de coordenadas fixado[1].

[1] Referimos o leitor ao capítulo 6 do volume 2 para uma discussão sobre sistemas Cartesianos de coordenadas.

Nosso propósito neste capítulo é examinar alguns exemplos e propriedades simples de gráficos de funções $f : X \to \mathbb{R}$, quando $X \subset \mathbb{R}$ for uma união finita de intervalos, postergando para os capítulos 4, 5 e 6 a discussão das propriedades dos gráficos de funções contínuas e deriváveis.

Em tudo o que segue supomos fixado, no plano, um sistema Cartesiano de coordenadas.

2.1 Generalidades e exemplos

Há uma interpretação geométrica bastante simples para a imagem de uma função real de uma variável real em termos de seu gráfico. Para exibi-la, marquemos, no plano Cartesiano da figura 2.1, os pontos de interseção do gráfico de uma função $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ com uma reta horizontal r, de ordenada $y = y_0$. Seja (x_0, y_0) um ponto comum

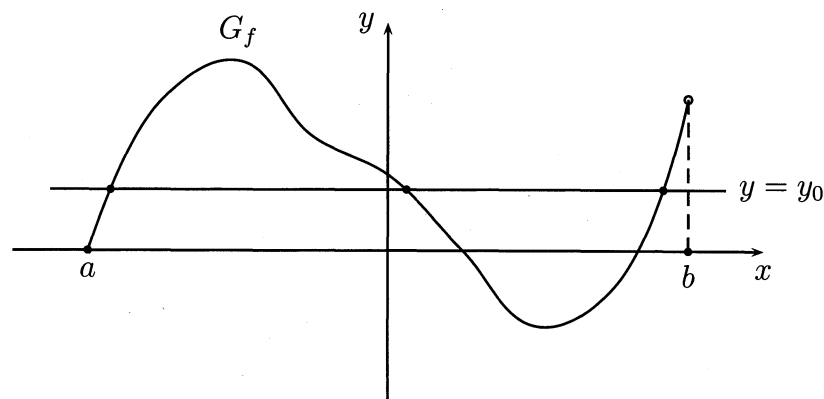



Figura 2.1: imagem × gráfico.

à reta e ao gráfico. Por pertencer ao gráfico de f, o ponto (x_0, y_0) deve ser tal que $x_0 \in [a, b)$ e $f(x_0) = y_0$. Reciprocamente, seja dado

um ponto (x_0, y_0) no plano Cartesiano, com $x_0 \in [a, b)$. Claramente, $(x_0, y_0) \in r$; além disso, se x_0 for uma solução da equação $f(x) = y_0$, i.e., se $f(x_0) = y_0$, então teremos também $(x_0, y_0) \in G_f$. Assim, a reta horizontal de ordenada y_0 intersectará o gráfico exatamente quando y_0 pertencer à imagem de f. O raciocínio para uma função qualquer $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, é inteiramente análogo e nos permite concluir que

A imagem de f é precisamente o conjunto dos $y_0 \in \mathbb{R}$ tais que a reta horizontal de ordenada y_0 intersecta o gráfico de f.

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, a *monotonicidade* de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ também nos diz muito sobre o comportamento de seu gráfico. Por exemplo, supondo que f seja crescente (resp. decrescente) em I, concluímos que, à medida que a variável x aumenta em I, os valores $f(x)$ aumentam (resp. diminuem) em $\mathbb{R}$, de maneira que o gráfico de f *sobe* (resp. *desce*).

Por outro lado, se $y_0 \in \mathbb{R}$ é o valor mínimo de $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ é um ponto de mínimo de f (cf. definição 1.24), então o ponto $(x, f(x))$ *está acima ou coincide* com o ponto (x, y_0), para todo $x \in I$ (cf. figura 2.2). De outra forma, o gráfico de f está contido no semiplano superior fechado determinado pela reta horizontal $y = y_0$, tocando tal reta no ponto (x_0, y_0).

Observe que os conceitos de valor máximo e ponto de máximo de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ admitem interpretações geométricas análogas às discutidas acima.

Vale ainda observar que nem todo subconjunto do plano (munido de um sistema Cartesiano xOy) pode ser visto como gráfico de uma função. De fato, suponha dada uma função real de uma variável real $f : X \to \mathbb{R}$, tal que X é uma união finita de intervalos. Se $(x_0, y_0) \in G_f$, então $x_0 \in X$, pela definição de gráfico; por outro lado (e mais importante), fixado $x_0 \in X$, se $A_1(x_0, y_1)$ e $A_2(x_0, y_2)$ são pontos sobre

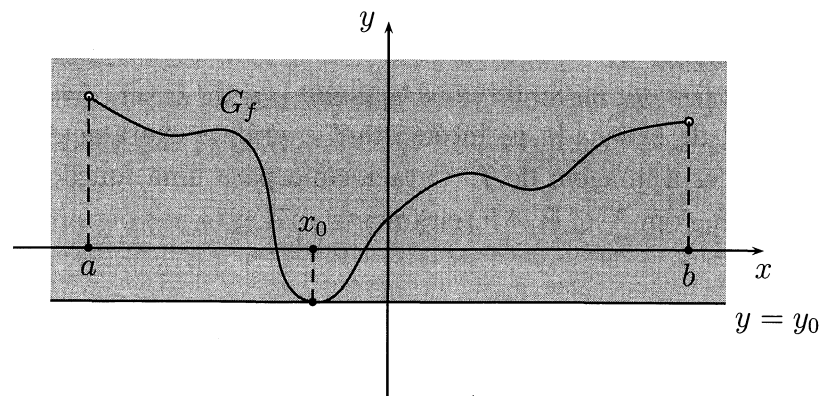



Figura 2.2: ponto de mínimo de $f : I \to \mathbb{R}$.

o gráfico de f, então, novamente pela definição de gráfico, temos

$$y_1 = f(x_0) = y_2,$$

de maneira que $A_1 = A_2$. Em resumo, para $x_0 \in \mathbb{R}$, a reta vertical $x = x_0$ do sistema Cartesiano em questão intersecta o gráfico de f se, e somente se, $x_0 \in X$; ademais, nesse caso tal reta intersecta o gráfico em *exatamente* um ponto. Assim, o subconjunto C do plano Cartesiano esboçado na figura 2.3 não representa o gráfico de função alguma $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, uma vez que toda reta vertical paralela às retas tracejadas e situada na faixa cinza intersecta C em mais de um ponto.

Por fim, vejamos alguns exemplos importantes de gráficos de funções.

Exemplo 2.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função constante e igual a c. O gráfico de f é o conjunto

$$G_f = \{(x, y);\ x \in \mathbb{R} \text{ e } y = c\} = \{(x, c);\ x \in \mathbb{R}\},$$

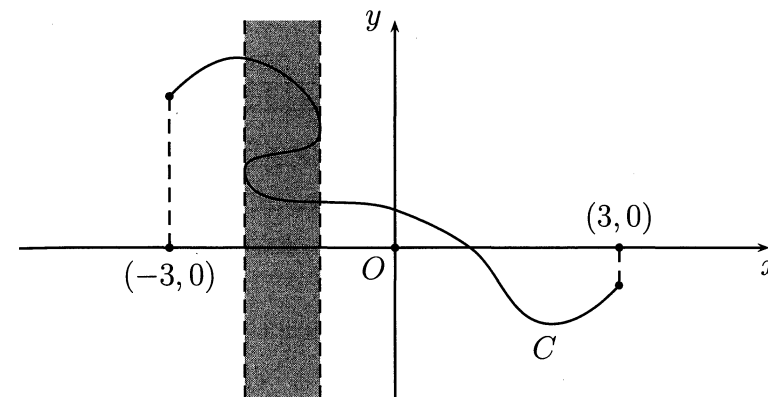



Figura 2.3: subconjuntos do plano que não são gráficos de funções.

i.e., o gráfico de f é a reta paralela ao eixo$-x$ e passando pelo ponto $(0, c)$ do eixo$-y$ (figura 2.4).

Exemplo 2.2. Lembre-se (cf. definição 1.2) de que a função identidade $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Seu gráfico é, portanto, o conjunto

$$G_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}} = \{(x, y);\ x \in \mathbb{R} \text{ e } y = x\} = \{(x, x);\ x \in \mathbb{R}\}.$$

É um exercício fácil de geometria Euclidiana verificar que os pontos da forma (x, x) e $(-x, x)$ são os pontos do plano Cartesiano situados sobre as bissetrizes dos ângulos formados pelos eixos coordenados, sendo que os da forma (x, x) pertencem ao primeiro ou terceiro quadrantes. Portanto, o gráfico da função $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ é a reta da figura 2.5, denominada a **bissetriz dos quadrantes ímpares**. Observe que o conjunto dos pontos da forma $(x, -x)$, i.e., a *bissetriz dos quadrantes pares*, é o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x$.

Exemplo 2.3. A **função modular** é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Segue imediatamente da definição de módulo de um

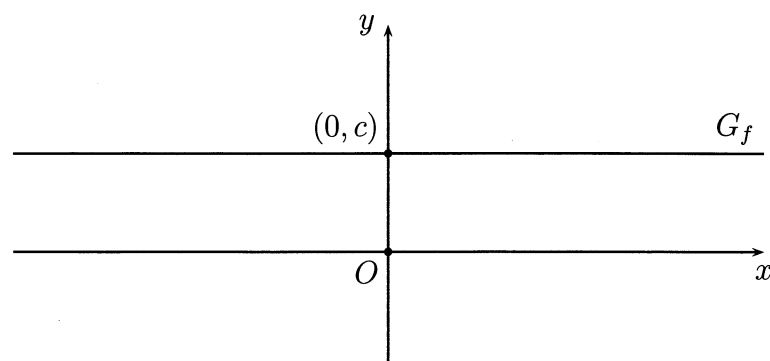



Figura 2.4: gráfico da função constante $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

número real (cf. seção 2.2 do volume 1) que

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, |x|);\ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, |x|);\ x \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(x, |x|);\ x \in \mathbb{R}_-\} \\ &= \{(x, x);\ x \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(x, -x);\ x \in \mathbb{R}_-\}. \end{aligned}$$

Como os pontos $(x, -x)$ e (x, x) são simétricos em relação ao eixo$-x$, o gráfico da função modular é obtido refletindo a porção do gráfico da função $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ situada no terceiro quadrante em relação ao eixo$-x$ (cf. figura 2.6).

Exemplo 2.4. Se $f(x) = ax + b$ é uma função afim, então seu gráfico é o subconjunto do plano Cartesiano dado por

$$G_f = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = ax + b\}.$$

De acordo com a discussão da seção 6.2 do volume 2, o gráfico de f é a reta de equação $y - ax - b = 0$, com coeficiente angular a e passando pelos pontos $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ e $B = (0, b)$. A figura 2.7 esboça o gráfico de $f(x) = ax + b$ para $a, b > 0$.

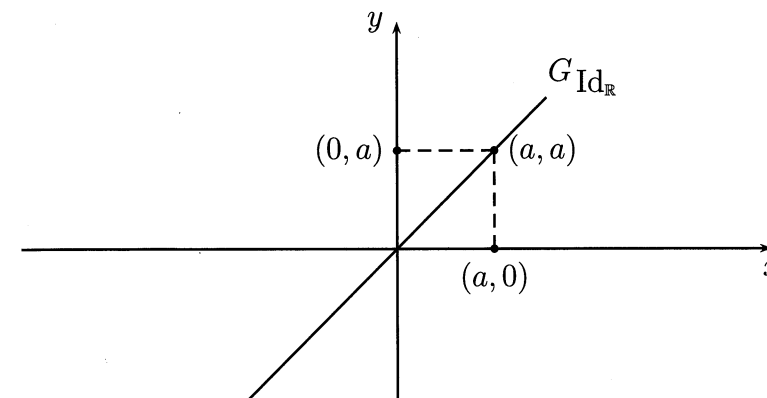



Figura 2.5: gráfico da função identidade $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Para o que segue, recorde (cf. problema 6.3.13 do volume 2) que, dados um ponto F e uma reta d no plano, com $F \notin d$, a **parábola** de **foco** F e **diretriz** d (cf. figura 2.8) é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que

$$\overline{PF} = \mathrm{dist}(P, d).$$

Por fim, o **eixo** da parábola é a reta que passa por F e é perpendicular à diretriz d, e o **vértice** da mesma é seu ponto V de interseção com o eixo.

Mostraremos, no que segue, que o gráfico de toda função quadrática é uma parábola. Mais precisamente, temos o seguinte

Teorema 2.5. Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é a parábola de eixo $\{x = -\frac{b}{2a}\}$ e vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, "aberta para cima" se $a > 0$, e "aberta para baixo" se $a < 0$.

Prova. Procuremos $x_0, y_0, k \in \mathbb{R}$ tais que $y_0 \neq k$ e, sendo $F(x_0, y_0)$ e

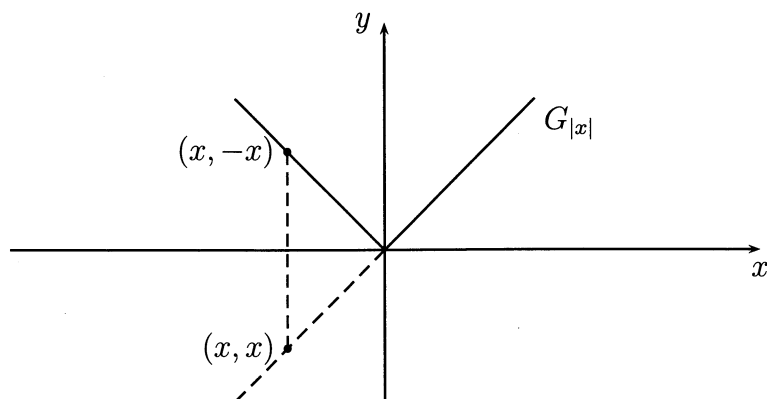



Figura 2.6: gráfico da função modular $f(x) = |x|$.

$d : \{y = k\}$, tenhamos

$$P \in G_f \Longleftrightarrow \overline{PF} = \text{dist}(P, d).$$

Para tanto, sendo $P(x, y)$, observemos que

$$P \in G_f \Longleftrightarrow y = ax^2 + bx + c$$

e

$$\overline{PF} = \text{dist}(P, d) \Longleftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |y - k|,$$

de sorte que queremos que

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c \quad &\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (y - k)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2(y_0 - k)}x^2 - \frac{x_0}{y_0 - k}x + \frac{x_0^2 + y_0^2 - k^2}{2(y_0 - k)}. \end{aligned}$$

Basta, então, resolvermos em x_0, y_0 e k o sistema de equações

$$\frac{1}{2(y_0 - k)} = a, \quad -\frac{x_0}{y_0 - k} = b, \quad \frac{x_0^2}{2(y_0 - k)} + \frac{1}{2}(y_0 + k) = c,$$

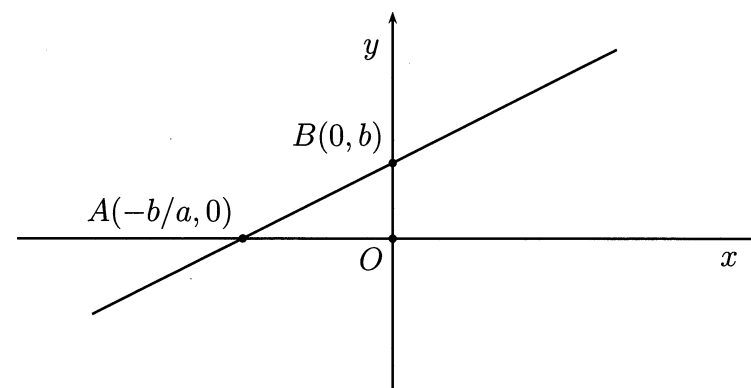



Figura 2.7: gráfico da função afim $f(x) = ax + b$.

o que é imediato: dividindo as duas primeiras equações, obtemos $x_0 = -\frac{b}{2a}$; em seguida, substituindo a primeira equação e o valor de x_0 na terceira equação, segue que

$$y_0 + k = 2\left(c - x_0^2 \cdot \frac{1}{2(y_0 - k)}\right) = 2\left(c - \frac{b^2}{4a^2} \cdot a\right) = -\frac{\Delta}{2a};$$

por fim, resolvendo o sistema

$$y_0 - k = \frac{1}{2a}, \quad y_0 + k = -\frac{\Delta}{2a},$$

obtém-se $y_0 = \frac{1-\Delta}{4a}$ e $k = -\frac{1+\Delta}{4a}$.

Finalmente, uma vez que o vértice V da parábola é a interseção da reta $x = -\frac{b}{2a}$ com o gráfico, temos

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{\Delta}{4a}.$$

■

Terminamos esta seção estabelecendo, na proposição a seguir, uma importante relação entre os gráficos de uma bijeção e de sua inversa.

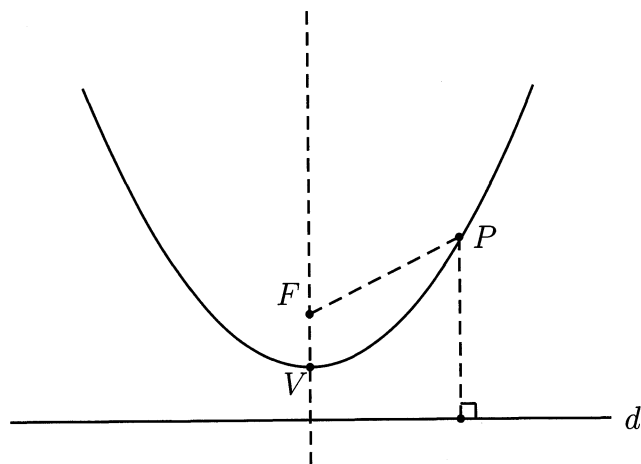



Figura 2.8: parábola de foco F e diretriz d.

Em seguida, ilustramos tal resultado na construção dos gráficos de duas funções importantes.

Proposição 2.6. Se os conjuntos não vazios $I, J \subset \mathbb{R}$ são uniões finitas de intervalos e $f : I \to J$ é uma bijeção, então os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano Cartesiano.

Prova. Fixe $a \in I$ e $b \in J$. Pela definição de função inversa, temos que

$$\begin{aligned}(a, b) \in G_f &\Leftrightarrow b = f(a) \\ &\Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \\ &\Leftrightarrow (b, a) \in G_{f^{-1}}.\end{aligned}$$

Mas, como os pontos (a, b) e (b, a) são simétricos em relação à reta $y = x$, nada mais há a fazer. ■

Exemplo 2.7. Esboce o gráfico da função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, +\infty) & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Solução. Vimos no exemplo 1.45 que f é a inversa da função $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $g(x) = x^2$. Como já conhecemos o gráfico de g, segue da proposição anterior que o gráfico de f é obtido como o simétrico do gráfico de g em relação à reta $y = x$ (figura 2.9). ■

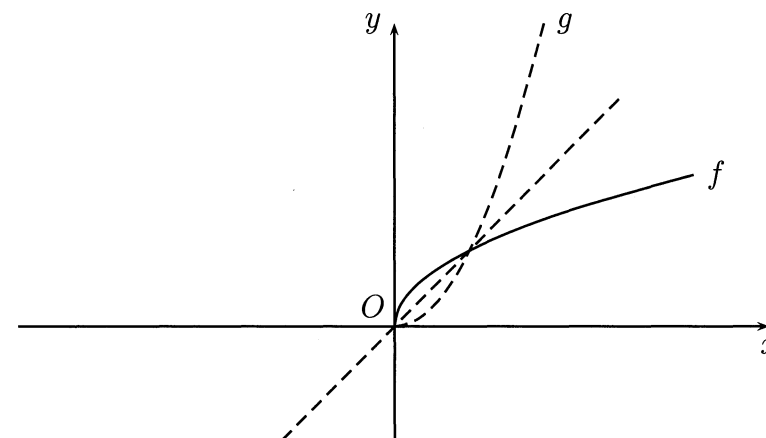



Figura 2.9: gráfico de $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exemplo 2.8. Recorde que a função de proporcionalidade inversa é a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

De posse da discussão desenvolvida até o momento, podemos esboçar muito acuradamente seu gráfico. De fato, f é claramente decrescente em $(0, +\infty)$; também já sabemos que f é ímpar (cf. problema 10, página 37), de sorte que, pelo problema 5, seu gráfico é simétrico

em relação à origem do plano Cartesiano; por outro lado, f é a inversa de si mesma, e a proposição anterior garante que seu gráfico também é simétrico em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares; por fim, mostraremos na seção 5.3 que seu gráfico é *emborcado para cima* em $(0, +\infty)$.

Observando que $f(x) = \frac{1}{x}$ se aproxima cada vez mais de zero à medida que x aumenta, chegamos ao esboço do gráfico de f constante da figura 2.10, construído com o auxílio das observações acima e dos pontos auxiliares $\left(n, \frac{1}{n}\right)$, para $1 \leq n \leq 4$ inteiro.

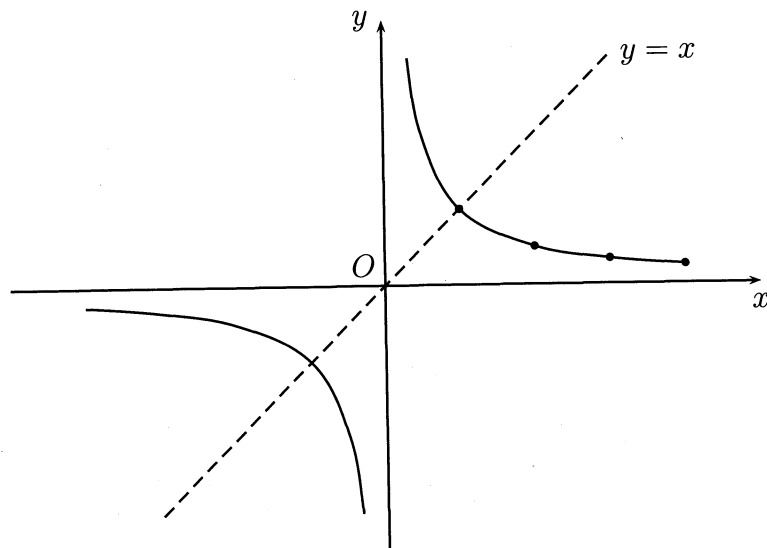



Figura 2.10: gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Problemas – Seção 2.1

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função quadrática dada por $f(x) = ax^2+bx+c$, onde $a \neq 0$. Sabendo que $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ são as raízes de f, e que $f(1) = -8$, pede-se:

   (a) Encontrar a, b, c.

   (b) Calcular $f(0)$.

   (c) Calcular as coordenadas do vértice de f.

   (d) Esboçar o gráfico de f.

2. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que f é **limitada** se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in I$. Prove que, nesse caso, o gráfico de f está contido na faixa horizontal do plano Cartesiano delimitada pelas retas $y = \pm M$.

3. * Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to I$ é uma função dada, mostre que os pontos fixos de f são, precisamente, as abscissas dos pontos de interseção do gráfico de f com a bissetriz dos quadrantes ímpares.

4. * Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f, g : I \to \mathbb{R}$ são funções dadas, explique como identificar os pontos comuns aos gráficos de f e g, traçados em um mesmo sistema Cartesiano.

Para o próximo problema, sugerimos ao leitor reler o enunciado do problema 10, página 37.

5. * Sejam $I \subset \mathbb{R}$ uma união de intervalos, simétrica em relação a $0 \in \mathbb{R}$, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Prove que:

   (a) Se f for par, então G_f é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

(b) Se f for ímpar, então G_f é simétrico em relação à origem.

6. Em cada um dos itens a seguir, esboce, num mesmo sistema Cartesiano, os gráficos das funções reais de uma variável real listadas:

   (a) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^4$ e $f_3(x) = x^3$.

   (b) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^3$ e $f_3(x) = x^5$.

7. Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Esboce, com justificativa, o gráfico da função parte inteira, $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cf. problema 5, página 13).

Para o próximo problema sugerimos ao leitor reler o enunciado do problema 15, página 37.

9. * Faça os seguintes itens:

   (a) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período $p > 0$, explique como construir o gráfico de f conhecendo a porção do mesmo para $0 \leq x < p$;

   (b) use o item (a) para construir o gráfico da função parte fracionária, $\{\ \} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cf. problema 6, página 13).

10. * Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada e $a \neq 0$ um real dado. Prove que o gráfico de:

   (a) $g(x) = f(x + a)$ é obtido transladando o gráfico de f de $-a$, paralelamente ao eixo das abscissas.

   (b) $g(x) = f(x) + a$ é obtido transladando o gráfico de f de a, paralelamente ao eixo das ordenadas.

   (c) $g(x) = -f(x)$ é obtido refletindo o gráfico de f ao longo do eixo das abscissas.

   (d) $g(x) = f(-x)$ é obtido refletindo o gráfico de f ao longo do eixo das ordenadas.

   (e) $g(x) = af(x)$ é obtido *alongando*[2] o gráfico de f verticalmente do fator a, se $a > 0$.

   (f) $g(x) = f(ax)$ é obtido *alongando* o gráfico de f horizontalmente do fator a, se $a > 0$.

11. Sejam I um intervalo da reta e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Que relação existe entre os gráficos de f e da função $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |f(x)|$? Utilize suas conclusões, juntamente com o resultado do problema anterior, para esboçar os gráficos das funções abaixo listadas:

   (a) $g(x) = \frac{1}{|x+1|}$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   (b) $g(x) = |x^2 - 4|$, para $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $g(x) = |x^2 - |x + 2| + 2|$, para $x \in \mathbb{R}$.

   (d) $g(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$, para todo real $x \neq 2$.

12. * Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{2-x}$.

13. Prove que o gráfico da função de proporcionalidade inversa é obtido pela rotação trigonométrica da hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 2$, do ângulo trigonométrico de $\frac{\pi}{4}$ radianos.

[2]O leitor deve ter cuidado com o sentido em que a palavra *alongando* é utilizada aqui; para tanto, compare os casos $0 < a < 1$ e $a > 1$.

2.2 Funções trigonométricas

A **função seno** é a função sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o seno de um arco de x radianos:

$$\begin{array}{rccc} \text{sen}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{sen}\, x \end{array}.$$

Analogamente, definimos a **função cosseno** por

$$\begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}.$$

As propriedades básicas das funções seno e cosseno são estabelecidas na proposição a seguir, para a qual o leitor pode achar útil recordar os enunciados do problema 15, página 37 e do problema 10, página 37.

Proposição 2.9. As funções seno e cosseno têm como imagem o intervalo $[-1, 1]$ e são periódicas de período 2π. Ademais, a função seno é ímpar e a função cosseno é par.

Prova. Imediata da discussão das seções 7.1 e 7.2 do volume 2. ■

De acordo com a proposição acima e a discussão contida no problema 15, página 37, a fim de esboçarmos o gráfico da função seno, é suficiente fazê-lo no intervalo $[-\pi, \pi]$, *copiando* em seguida essa porção do gráfico em cada um dos intervalos da forma $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Por outro lado, uma vez que a função seno é ímpar, a fim de obtermos seu gráfico no intervalo $[-\pi, \pi]$, é suficiente construí-lo no intervalo $[0, \pi]$; feito isto, ao *refleti-lo* em torno da origem do plano Cartesiano obtemos (de acordo com o item (c) do problema 10, página 37, uma vez que a função seno é ímpar) o gráfico no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Provaremos na seção 4.1 (cf. exemplo 4.10) que o gráfico da função seno é uma curva *contínua*, i.e., sem interrupções. Por outro lado, na

seção 5.3 mostraremos (cf. exemplo 5.19) que tal gráfico é "*emborcado para baixo*" no intervalo $[0, \pi]$. Assumindo por enquanto a validade dessas afirmações, podemos finalmente esboçar o gráfico da função seno.

Exemplo 2.10. Reunindo as informações de que dispomos até o momento sobre a função seno em $[0, \pi]$ (imagem, continuidade e concavidade), juntamente com o fato de que a mesma é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e satisfaz $\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\, x$, a fim de esboçarmos razoavelmente o gráfico da mesma nesse intervalo basta tabelarmos alguns valores de $\text{sen}\, x$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, o que fazemos a seguir:

0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

De posse das informações acima e utilizando a periodicidade do seno, obtemos imediatamente a figura 2.11, primeiro no intervalo $[0, \pi]$ e, em seguida, no intervalo $[-\pi, \pi]$.

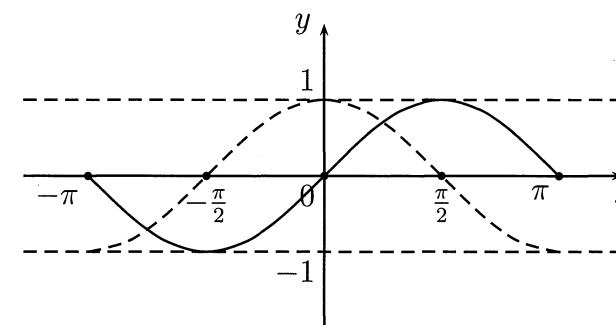



Figura 2.11: gráfico das funções seno e cosseno.

Observemos agora que, a partir das fórmulas de adição de arcos,

temos
$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Portanto, o item (a) do problema 10, página 68, garante que, uma vez esboçado o gráfico da função seno, obtemos o esboço correspondente ao gráfico da função cosseno *transladando* o gráfico da função seno de $-\frac{\pi}{2}$ paralelamente ao eixo das abscissas. Na figura 2.11, o gráfico da função cosseno no intervalo $[-\pi, \pi]$ é representado pela curva pontilhada, situada na faixa do plano Cartesiano entre as retas $y = -1$ e $y = 1$.

Vejamos, agora, um exemplo relevante de aplicação das fórmulas de adição de arcos da proposição 7.18 do volume 2, o qual nos diz como proceder para estudar as funções construídas como uma certa soma de múltiplos das funções seno e cosseno.

Exemplo 2.11. Dados reais positivos a e b, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por
$$f(x) = a\cos x + b \operatorname{sen} x.$$

Escrevendo
$$a\cos x + b\operatorname{sen} x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen} x\right),$$

observemos que
$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Portanto, o ponto $P\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ pertence à porção do ciclo trigonométrico Γ situada no primeiro quadrante e, daí, existe um real $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que
$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

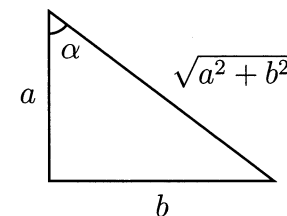



Figura 2.12: definindo o ângulo α.

(figura 2.12). Assim, temos das fórmulas de adição de arcos que
$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos x + b\operatorname{sen} x \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos x + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Em particular, segue de $|\cos(x-\alpha)| \le 1$ que
$$|f(x)| = \sqrt{a^2+b^2}|\cos(x-\alpha)| \le \sqrt{a^2+b^2},$$

e não é difícil provar, a partir daí, que a imagem de f é precisamente o intervalo $[-c, c]$, onde $c = \sqrt{a^2+b^2}$ (veja o problema 1).

Voltemo-nos, por fim, ao estudo da **função tangente**, i.e., da função que associa, a cada real x em seu domínio, o número real $\operatorname{tg} x$. Uma vez que
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \exists\, k \in \mathbb{Z},$$

o domínio (maximal) da função tangente é o conjunto
$$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\},$$

de sorte que a função desejada é
$$\begin{array}{rccc} \operatorname{tg}: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{tg} x \end{array}.$$

Para $x \in D$, temos

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

e é imediato verificar que não existe um real $0 < p < \pi$ tal que $\operatorname{tg}(x+p) = \operatorname{tg} x$, para todo $x \in D$. Portanto, a função tangente é periódica de período π. Ademais, uma vez que D é um subconjunto de $\mathbb{R}$ simétrico em relação a 0 e

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

para todo $x \in D$, concluímos que a função tangente é ímpar.

Dado o acima exposto, para esboçar o gráfico da função tangente é suficiente tê-lo à mão no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. De fato, seu caráter ímpar garante que o gráfico no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ é obtido por reflexão em torno da origem do sistema Cartesiano da porção do mesmo no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Por outro lado, uma vez esboçado o gráfico no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a periodicidade da função tangente nos permite esboçá-lo em todos os intervalos da forma $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$: basta transladar o gráfico no $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de $k\pi$ unidades paralelamente ao eixo das abscissas, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Provaremos na seção 4.1 (cf. problema 3, página 127) que o gráfico da função tangente, restrita ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, é uma curva *contínua*, i.e., sem interrupções. Por outro lado, na seção 5.3 mostraremos (cf. exemplo 5.20) que tal gráfico é "*emborcado para cima*" no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Assumindo por enquanto a validade dessas afirmações, e de posse da discussão dos parágrafos anteriores, podemos esboçar o gráfico da função tangente de forma análoga ao feito no exemplo 2.10, obtendo aproximadamente a figura 2.13.

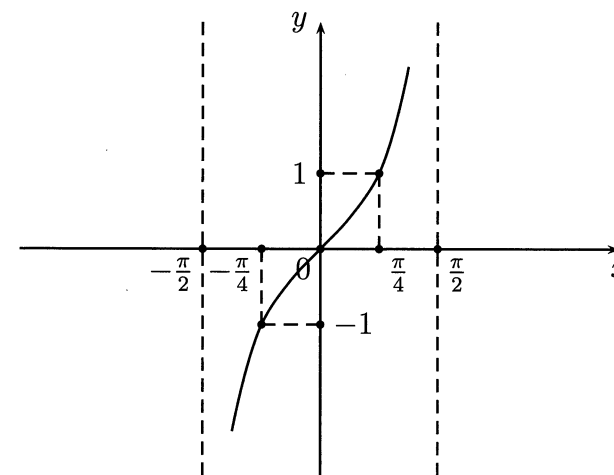



Figura 2.13: gráfico da função tangente.

Problemas – Seção 2.2

1. * Sejam a e b reais não ambos nulos, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por
$$f(x) = a\cos x + b \operatorname{sen} x.$$
   (a) Obtenha, com justificativa, o conjunto $\operatorname{Im}(f)$.
   (b) Prove que f é periódica de período 2π.
   (c) Esboce os gráficos de f e da função seno em um mesmo sistema Cartesiano.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x$. Calcule os valores máximo e mínimo de f, bem como os números reais x para os quais f assume tais valores.

3. (Canadá.) Calcule o número de soluções reais da equação $\operatorname{sen} x = \frac{x}{10}$.

4. Encontre o valor máximo assumido pela função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 4\sqrt{5 - x^2}$.

5. (Nova Zelândia.) Seja α um número irracional dado. Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \cos x + \cos(\alpha x),$$

para $x \in \mathbb{R}$, não é periódica.

6. Encontre valores inteiros de n para os quais a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada para $x \in \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \cos(nx) \operatorname{sen}\left(\frac{5x}{n}\right),$$

é periódica de período 3π.

7. (Canadá.) Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ não é periódica.

CAPÍTULO 3

Mais sobre Números Reais

Antes de prosseguirmos em nosso estudo de funções, precisamos de um pequeno interlúdio técnico, a fim de apresentar as noções de limite de uma sequência (infinita) de números reais e de série convergente. Dentre outras aplicações, tais noções nos permitirão apresentar o importante exemplo de uma série geométrica convergente, bem como introduzir o segundo dos dois mais famosos números da Matemática[1], o número e. Apresentamos ainda um famoso teorema de Kronecker sobre subconjuntos densos da reta, o qual encontrará várias aplicações interessantes, aqui e em capítulos subsequentes.

[1]Como o leitor deve suspeitar, o outro é o número π, definido no volume 2 como o valor numérico da área de um círculo de raio 1.

3.1 Limites de sequências

Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ (em $\mathbb{R}$), estamos interessados em reconhecer se os números reais a_n se aproximam *cada vez mais* de um certo número real l, à medida que n aumenta; por exemplo, se $a_n = \frac{1}{n}$, então é razoável dizer que os números a_n se aproximam de 0 à medida que n aumenta, haja vista que o resultado da divisão de 1 por n é cada vez menor à medida que n aumenta. Temos então a definição a seguir.

Definição 3.1. Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ **converge** para um real l quando, uma vez prescrito um erro $\epsilon > 0$ para o valor de l, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \epsilon$, para todo $n > n_0$.

Alternativamente, se $(a_n)_{n\geq 1}$ convergir para l, diremos que a sequência é **convergente** e que l é um **limite** da sequência, o que denotamos escrevendo

$$a_n \xrightarrow{n} l \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} a_n = l.$$

Por fim, uma sequência que não é convergente é dita **divergente**.

Em geral, diminuindo a aproximação $\epsilon > 0$, é de se esperar que tenhamos de aumentar o natural n_0 da definição de convergência. Em outras palavras, é de se esperar que n_0 dependa de $\epsilon > 0$. De qualquer modo, o importante para assegurar a convergência da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é o fato de que, fixada arbitrariamente uma aproximação $\epsilon > 0$, sejamos capazes de escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon.$$

No intuito de familiarizar o leitor com o importante conceito de limite de sequências, colecionamos, no que segue, vários exemplos elementares de sequências convergentes e divergentes.

Exemplos 3.2.

(a) Se $a_n = \frac{1}{n}$, então $a_n \xrightarrow{n} 0$: de fato, dado $\epsilon > 0$, a fim de que $|a_n - 0| < \epsilon$ basta que $n > \frac{1}{\epsilon}$; assim, uma vez fixado $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$, temos $|a_n - 0| < \epsilon$, para $n > n_0$.

(b) Se $a_n = (-1)^n$, então $(a_n)_{n\geq 1}$ não converge: de fato, como os termos da sequência são alternadamente iguais a 1 ou -1, não podem aproximar-se todos de um mesmo real l (formalize esse argumento intuitivo).

(c) Se $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, então $a_n \xrightarrow{n} 1$: isso porque $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$, de maneira que $|a_n - 1| < \epsilon$ para $n > \frac{1}{\epsilon}$.

(d) Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência constante, com $a_n = c$ para todo $n \geq 1$, então $a_n \to c$.

Exemplo 3.3. Se $a_n = q^n$, com $0 < |q| < 1$, então $a_n \xrightarrow{n} 0$.

Prova. Como $\frac{1}{|q|} > 1$, podemos escrever $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$, com $\alpha > 0$. Portanto, a fórmula do desenvolvimento binomial nos dá

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

e, daí,

$$|a_n - 0| = |q|^n \leq \frac{1}{1+n\alpha}.$$

Assim, se queremos que $|a_n - 0| < \epsilon$, basta impormos que $\frac{1}{1+n\alpha} < \epsilon$ ou, equivalentemente, que $n > \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$. ■

Exemplo 3.4. A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, dada para $n \geq 1$ por $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, converge para 0.

Prova. Veja que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Assim, dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{4\epsilon^2}$, de sorte que

$$n > n_0 \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n_0+1} + \sqrt{n_0} > 2\sqrt{n_0} > \frac{1}{\epsilon}$$

e, daí,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \epsilon.$$

■

A definição de convergência de uma sequência não deixa claro se o limite de uma sequência convergente é único. De outra forma, em princípio poderia ocorrer que uma certa sequência convergisse para mais de um limite. No entanto, como mostra o resultado a seguir, isto não ocorre.

Proposição 3.5. Se a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ convergir, então seu limite é único.

Prova. Sejam l_1 e l_2 reais distintos e suponha que a sequência convergisse simultaneamente para l_1 e l_2. Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}|l_1 - l_2| > 0$, a definição de limite garante a existência de $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - l_1| < \epsilon \;\text{ e }\; n > n_2 \Rightarrow |a_n - l_2| < \epsilon.$$

Daí, pela desigualdade triangular,

$$n > \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow |l_1 - l_2| \leq |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < 2\epsilon = |l_1 - l_2|,$$

o que é um absurdo. ■

A proposição a seguir lista algumas propriedades básicas de limites de sequências. Para seu enunciado, dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, definimos uma **subsequência** da mesma como a sequência obtida a partir de $(a_n)_{n\geq 1}$, restringindo-nos a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$ do conjunto de índices. Como a função $j \mapsto n_j$ entre $\mathbb{N}_1$ e $\mathbb{N}$ é uma bijeção, toda subsequência de uma sequência é, ainda, uma sequência. Ademais, podemos denotá-la por $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposição 3.6. Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência com limite l, então:

(a) Se $a_n \geq a$ (resp. $a_n \leq a$), para todo $n \geq 1$, então $l \geq a$ (resp. $l \leq a$) .

(b) Toda subsequência $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(a_n)_{n\geq 1}$ ainda converge para l.

Prova.
(a) Suponhamos que $a_n \geq a$, para todo $n \geq 1$, e mostremos que $l \geq a$ (o outro caso é análogo). Por contradição, se $l < a$, tome $\epsilon = a - l$. A definição de limite de sequências garante a existência de um índice n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$; em particular, para $n > n_0$, temos

$$a_n < l + \epsilon = l + (a - l) = a,$$

o que é um absurdo.

(b) Seja dado $\epsilon > 0$. Como $a_n \xrightarrow{n} l$, existe um natural n_0 tal que $|a_n - l| < \epsilon$, para $n > n_0$. Mas, como $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, existe um índice n_i na subsequência tal que $n_j > n_0$ para $j \geq i$; portanto, para tais j, temos $|a_{n_j} - l| < \epsilon$, o que é o mesmo que dizer que $a_{n_k} \xrightarrow{k} l$. ■

Apesar da notação carregada, o item (b) da proposição acima pode ser resumido em palavras de uma maneira bastante simples: basicamente ele afirma que, se todos os termos de uma sequência se aproximam de um real l à medida que aumentamos seus índices, então, quando consideramos somente uma parte (ainda infinita) desses termos, eles continuam se aproximando de l à medida que aumentamos seus índices.

A proposição acima possui o seguinte corolário imediato, o qual fornece uma condição suficiente para a divergência de uma sequência.

Corolário 3.7. Uma sequência que possui duas subsequências convergindo para limites distintos é divergente.

Até agora, exceto por alguns exemplos bastante simples, não vimos ainda como seria possível descobrir o limite de uma sequência que saibamos ser convergente. Para tanto, precisamos entender como é possível operar com limites de sequências, problema que examinamos a partir de agora. Precisaremos, inicialmente, do seguinte resultado auxiliar.

Lema 3.8. Toda sequência convergente é limitada.

Prova. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência que converge para o limite l. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < 1,$$

o que, por sua vez, implica

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|.$$

Por fim, se $L = \max\{1+|a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$, então $|a_n| < L$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e a sequência é limitada. ■

Proposição 3.9. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências convergentes de números reais e c é um número real qualquer.

(a) Se $a_n \to a$, então $ca_n \to ca$.

(b) Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$, então $a_n \pm b_n \to a \pm b$ e $a_n b_n \to ab$.

(c) Se $a_n \to 0$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ é limitada, então $a_n b_n \to 0$.

(d) Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$, com $b, b_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$, então $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Prova.
(a) Se $c = 0$, então $ca_n \to 0 = ca$. Suponhamos $c \neq 0$, e seja dado $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{|c|}$. Daí,

$$n > n_0 \Rightarrow |ca_n - ca| = |c||a_n - a| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

(b) Provemos que $a_n + b_n \to a + b$ (provar que $a_n - b_n \to a - b$ é análogo). Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, tomando $n > \max\{n_1, n_2\}$, temos

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Seja agora $L > 0$ tal que $|b_n| < L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2L} \text{ e } |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a| + 1}.$$

Então

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2L} \cdot L + |a| \cdot \frac{\epsilon}{2|a|+1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

(c) Seja $L > 0$ tal que $|b_n| < L$ para todo $n \geq 1$. Dado $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{\epsilon}{L}.$$

Então

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\epsilon}{L} \cdot L = \epsilon.$$

(d) Pela última parte do item (b), basta mostrarmos que $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Para tanto, observemos que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b_n|} \leq \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b| - |b_n - b|}.$$

Dado $\epsilon > 0$, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para $n > n_0$, temos então que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b| - |b|/2} = 2|b_n - b| < \epsilon.$$

■

Para o que segue, recordemos que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reais é simplesmente uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, para a qual convencionamos a notação $a_n = f(n)$. Portanto, $(a_n)_{n\geq 1}$ é:

- **monótona** *crescente* (resp. *decrescente*, *não decrescente*, *não crescente*) se $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$, $a_n \leq a_{n+1}$, $a_n \geq a_{n+1}$), para todo $n \geq 1$.
- **limitada**, se existe um real positivo M tal que $|a_n| < M$, para todo $n \geq 1$.

O resultado mais importante sobre limites de sequências é o teorema a seguir, conhecido na literatura como o **teorema de Bolzano-Weierstrass**[2].

Teorema 3.10 (Bolzano-Weierstrass)**.** Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Prova. Suponhamos que $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência monótona não decrescente e limitada, i.e., que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots < M,$$

para algum $M > 0$ (os demais casos são análogos). Então M é uma cota superior para o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, de sorte que a proposição 1.14 do volume 1 garante que tal conjunto possui supremo, digamos $\sup A = l$. Afirmamos que $a_n \to l$. Para tanto, seja $\epsilon > 0$ dado; como $l - \epsilon$ não é mais cota superior de A, algum elemento de A é maior que $l - \epsilon$, digamos $a_{n_0} > l - \epsilon$. Mas, como $a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \cdots$, concluímos que $a_n > l - \epsilon$, para $n \geq n_0$. Assim, para $n \geq n_0$, temos

$$l - \epsilon < a_n \leq l < l + \epsilon,$$

como desejado. ■

[2]Após Karl Weierstrass, matemático alemão do século XIX.

O teorema acima e a definição de convergência garantem que, se uma sequência limitada for monótona a partir de um determinado termo, então ela ainda será convergente. Exploramos essa observação nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 3.11. Dado um real positivo a, a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $a_n = \sqrt[n]{a}$ é convergente e seu limite é igual a 1.

Prova. Se $a > 1$, então $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 1$, de sorte que, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Para mostrarmos que $l = 1$, seja $a_n = 1 + b_n$. Então

$$a = a_n^n = (1 + b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{1} b_n > nb_n,$$

de sorte que $0 < b_n < \frac{1}{n}$. Portanto, $b_n \to 0$ quando $n \to +\infty$, o que por sua vez garante que $a_n = 1 + b_n \to 1$.

Se $0 < a < 1$ e $a_n = \sqrt[n]{a}$, provamos analogamente que $a_n \to 1$. ■

Exemplo 3.12. A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $a_n = \sqrt[n]{n}$ é convergente e seu limite é igual a 1.

Prova. Os termos iniciais da sequência são $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, ..., e é fácil verificar diretamente que $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5}$. Como $2^n \geq n^2$ para $n \geq 4$ (por indução, por exemplo), temos $a_2 \geq a_n$ para $n \geq 4$, de

sorte que a sequência é limitada; portanto, se mostrarmos que ela é decrescente a partir de seu terceiro termo sua convergência seguirá do teorema de Bolzano-Weierstrass. Para o que falta, dado $n > 2$ inteiro, temos

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Provemos a última desigualdade acima. Para $n = 3$ ela é de verificação imediata; para $n > 3$, basta mostrarmos que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$. Para tanto, observemos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

e

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.\end{aligned}$$

Resta mostrarmos que o limite da sequência é 1. Para tanto, se $a_n = 1 + b_n$ e $n \geq 2$, então

$$n = a_n^n = (1+b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{1}b_n + \binom{n}{2}b_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}\cdot b_n^2,$$

de sorte que

$$0 < b_n^2 < \frac{2}{n-1}.$$

Portanto $b_n \to 0$ quando $n \to +\infty$, o que, por sua vez, garante que $a_n = 1 + b_n \to 1$. ■

Frisamos que, por vezes, não precisamos mostrar que uma dada sequência converge, mas somente garantir que ela possui uma subsequência convergente. Nesse sentido, o teorema 3.14 a seguir, devido a Weierstrass e conhecido na literatura como o **teorema de Weierstrass**, dá uma condição suficiente para a existência de uma tal subsequência. Antes, contudo, precisamos de um lema importante em si, conhecido como o **lema dos intervalos encaixantes**. No que segue, se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo finito, escrevemos $|I|$ para denotar seu comprimento.

Lema 3.13. Sejam dados os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$. Se $\lim_{n\to+\infty}|I_n| = 0$, então existe um único $l \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n\geq 1} I_n = \{l\}$.

Prova. Note, inicialmente, que a interseção dos I_n é vazia ou unitária; de fato, se existissem reais $a < b$ em tal interseção, teríamos $[a, b] \subset \bigcap_{n\geq 1} I_n$; em particular, $[a, b] \subset I_n$ e, daí, $|I_n| \geq b - a$, o que é uma contradição.

Por outro lado, a condição de encaixe $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ garante que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_1$, e o teorema de Bolzano garante a existência de $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Afirmamos que $l \in \bigcap_{n\geq 1} I_n$. Como $l = \sup\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\}$, segue que $a_n \leq l$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, fixado $m \in \mathbb{N}$, temos $a_n \leq b_m$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e o item (a) da proposição 3.6 garante que $l = \lim_{n\to+\infty} a_n \leq b_m$. Mas, como o m fixado foi escolhido arbitrariamente, temos $l \leq b_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Segue então que $l \in [a_m, b_m] = I_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, conforme desejávamos mostrar. ■

Teorema 3.14 (Weierstrass). Toda sequência limitada admite uma subsequência convergente.

Prova. Seja $I_0 = [a_0, b_0]$ um intervalo fechado e limitado contendo a sequência limitada $(a_n)_{n\geq 1}$. Dentre os intervalos $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ e $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$, escolha um que contenha uma infinidade de termos da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$,

e denote tal intervalo por I_1. Proceda do mesmo modo com I_1, obtendo um intervalo fechado $I_2 \subset I_1$ tal que $|I_2| = \frac{1}{2}|I_1|$ e I_2 contenha uma infinidade de termos da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Prosseguindo indutivamente, construímos uma sequência $I_1, I_2, I_3, \ldots$ de intervalos fechados tais que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ e $|I_{n+1}| = |I_n|/2$, para todo $n \geq 1$. Portanto, pelo lema dos intervalos encaixantes, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{k\geq 1} I_k = \{c\}$.

Para terminar, escolha $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_1} \in I_1$; em seguida, após ter escolhido $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_j} \in I_j$, tome $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{j+1} > n_j$ e $a_{n_{j+1}} \in I_{j+1}$ (isto é possível pela definição dos I_j). Por fim, um argumento análogo ao usado na prova do lema dos intervalos encaixantes garante que $a_{n_j} \to c$. ■

O conceito de sequência convergente tem um apelo geométrico bem forte, qual seja, a ideia de que os termos da sequência se aproximam mais e mais de um certo número real, à medida que seus índices aumentam. Mas também é de se esperar que, se os termos de uma sequência ficarem cada vez mais próximos uns dos outros, a sequência deva convergir. Esta observação leva à definição a seguir.

Definição 3.15. Uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é dita uma **sequência de Cauchy** se, dado $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon.$$

O resultado fundamental acerca de sequências de Cauchy é o conteúdo do seguinte resultado.

Teorema 3.16. Uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é convergente se, e só se, for de Cauchy.

Prova. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência convergente, com limite l. Dado $\epsilon > 0$, a definição de convergência garante a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, dados $m, n > n_0$, temos

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - l| + |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

e a sequência é de Cauchy.

Reciprocamente, seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de Cauchy. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_m - a_n| < 1$ para $m, n > n_0$. Em particular, $|a_m - a_{n_0+1}| < 1$ para todo $m > n_0$, e a sequência tem todos os seus termos contidos em

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\} \cup (a_{n_0+1} - 1, a_{n_0+1} + 1),$$

de sorte que é limitada. Portanto, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ possui uma subsequência convergente, digamos $a_{n_k} \to l$. Provemos que, em verdade, $a_n \to l$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > N_0 \Rightarrow |a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, como a sequência é de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N_1 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sendo $M = \max\{N_1, N_2\}$ e fixando $n_k > M$, temos

$$n > M \Rightarrow |a_n - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

de modo que $a_n \to l$. ■

Vejamos um exemplo interessante de aplicação do teorema acima.

Exemplo 3.17. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq c|a_{n+1} - a_n|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $0 < c < 1$ é um real fixado. Mostre que tal sequência é convergente.

Prova. Pelo teorema 3.16, basta mostrarmos que se trata de uma sequência de Cauchy. Para tanto, iterando a propriedade satisfeita pela sequência, é imediato que, para todo $k \in \mathbb{N}$, tenhamos

$$|a_{k+1} - a_k| \leq c^{k-1}|a_2 - a_1|.$$

Sejam, agora, n e p naturais dados. Temos

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} c^{k-1}|a_2 - a_1| \\ &= |a_2 - a_1|c^{n-1}\left(\frac{1 - c^{p+1}}{1 - c}\right), \end{aligned}$$

e a última expressão acima tende a 0 quando $n \to +\infty$, pelo exemplo 3.3. Portanto, $(a_n)_{n\geq 1}$ é, realmente, uma sequência de Cauchy. ■

Problemas – Seção 3.1

1. * Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências convergentes de números reais, com $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Generalize o item (a) da proposição 3.6, mostrando que se $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq 1$, então $a \leq b$.

2. (Hungria.) Seja $(R_n)_{n\geq 1}$ uma sequência infinita de retângulos dois a dois distintos no plano Cartesiano, cada um deles com vértices $(0,0)$, $(a_n, 0)$, $(0, b_n)$ e (a_n, b_n), para algum par de inteiros positivos a_n, b_n. Prove que há dois desses retângulos tais que um contém o outro.

3. Generalize o resultado do exemplo 3.3, mostrando que, dados $k \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, com $|a| > 1$, temos $\frac{n^k}{a^n} \to 0$ quando $n \to +\infty$.

4. (Torneio das Cidades.) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de naturais dois a dois distintos, todos maiores que 1. Prove que há infinitos naturais k tais que $a_k > k$.

5. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências de números reais e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n \in [0,1]$ um real fixado. Denote por $(c_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida por
$$c_n = (1 - t_n)a_n + t_n b_n,$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $a_k, b_k \to c$, prove que $c_k \to c$.

6. * Prove o **teorema do confronto**: sejam $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ e $(c_n)_{n\geq 1}$ sequências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $a_n, c_n \to l$, para algum $l \in \mathbb{R}$, então $c_n \to l$.

7. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tais que, para todos os $m, n \in \mathbb{N}$, tenhamos
$$|a_m - a_n| \leq \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$
Prove que a sequência é constante.

8. (Áustria-Polônia.) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de reais positivos, tais que
$$a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k},$$
para todo $k \geq 1$. Prove que a sequência é convergente e calcule seu limite.

9. Sejam $n > 1$ um inteiro fixado e $t_0, t_1, \ldots, t_n$ reais também fixados, tais que $t_0 + t_1 + \cdots + t_n = 0$. Prove que a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$, dada por
$$a_k = t_0\sqrt{k} + t_1\sqrt{k+1} + \cdots + t_n\sqrt{k+n}$$
converge para 0.

10. (Romênia.) A sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é tal que $\sqrt{x_{n+1}+2} \leq x_n \leq 2$, para todo $n \geq 1$. Encontre todos os possíveis valores de x_{1986}.

11. (Leningrado.) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que, para todos $m, n \in \mathbb{N}$, tenhamos
$$|a_m + a_n - a_{m+n}| \leq \frac{1}{m+n}.$$
Prove que a sequência é uma PA.

12. (Bulgária.) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja
$$a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right).$$
Prove que a sequência assim definida é decrescente, conclua sua convergência e calcule o limite correspondente.

13. (Romênia.) Sejam k um natural fixado e $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida por
$$a_n = \sqrt{k + \sqrt{k + \cdots + \sqrt{k}}},$$
com exatamente n raízes quadradas.
    (a) Mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ é convergente.
    (b) Mostre que, quando k é ímpar, o limite da sequência é um número irracional.
    (c) Encontre todos os valores naturais de k para os quais o limite da sequência seja um número inteiro.

14. Para cada real positivo a, considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ definida por $a_1 = 1$ e, para $k \geq 1$ inteiro,
$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{a}{a_k}\right).$$
Prove que a sequência converge para $\sqrt{a}$.

15. (Turquia.) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de inteiros tal que $0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}$, para todo n natural. Dados números reais x e y, com $0 \leq x < y \leq 1$, prove que existem naturais m e n tais que
$$x < \frac{a_m}{a_n} < y.$$

16. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de reais positivos. Mostre que a desigualdade
$$1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$$
se verifica para infinitos inteiros positivos n.

3.2 Séries de números reais

Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais. Pela **série**
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$
ou simplesmente $\sum_{n\geq 1} a_n$, entendemos a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$, onde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ para $n \geq 1$. O número real s_n é denominado a **n−ésima soma parcial** da série $\sum_{n\geq 1} a_n$, e dizemos que tal série **converge** para $s \in \mathbb{R}$ se a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ de suas somas parciais converge para s. Nesse caso, dizemos que s é a **soma** da série e escrevemos
$$\sum_{n\geq 1} a_n = s. \tag{3.1}$$
Em outras palavras, quando escrevermos $\sum_{k\geq 1} a_k = s$, estaremos dizendo que as somas finitas $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ se aproximam mais e mais do número real s, à medida que $n \to +\infty$. É nesse sentido que a igualdade (3.1) deve ser pensada, como um limite.

Por vezes, teremos em mãos uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ de números reais, em cujo caso a série correspondente será denotada por $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Deixamos ao leitor a tarefa (imediata) de adaptar as discussões acima e porvir a tal situação.

Nosso interesse primordial nesta seção é encontrar critérios que permitam decidir se uma dada série é ou não convergente. Caso não o seja, diremos que se trata de uma série **divergente**. Vejamos dois exemplos de séries divergentes.

Exemplo 3.18. As séries $\sum_{k\geq 1} k$ e $\sum_{k\geq 1}(-1)^k$ são divergentes.

Prova. A primeira série diverge por ter $n-$ésima soma parcial $s_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, logo divergente. No segundo caso, a $n-$ésima soma parcial s_n da série é tal que $s_n = 0$, se n for par, e $s_n = -1$, se n for ímpar, de sorte que também é uma sequência divergente. ■

Dada uma série $\sum_{n\geq 1} a_n$, referimo-nos a um termo genérico a_n como o **termo geral** da série. A proposição a seguir dá uma condição *necessária* para a convergência de uma série em função de seu termo geral.

Proposição 3.19. Se a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ é convergente, então $a_k \to 0$.

Prova. Dado $\epsilon > 0$, queremos provar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \epsilon$. Seja $l = \sum_{k\geq 1} a_k$. Pela definição de convergência de uma série, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí, pela desigualdade triangular, temos, para $n > n_0$, que

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq |(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - l| + |l - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

■

A recíproca da proposição acima não é válida, i.e., há séries divergentes $\sum_{k\geq 1} a_k$ para as quais $a_k \to 0$. O exemplo clássico é o da **série harmônica**, i.e., da série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$, cuja divergência é discutida no exemplo a seguir e encontrará uso posterior nestas notas.

Exemplo 3.20. Dado $n \in \mathbb{N}$, se m é o único natural tal que $2^m \leq n < 2^{m+1}$, então

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{m}{2} + 1. \tag{3.2}$$

Em particular, a série harmônica é divergente.

Prova. Veja que, para todo inteiro $k > 1$,

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k} > \underbrace{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1} \text{ vezes}} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=3}^{n} \frac{1}{j} &\geq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=3}^{2^m} \frac{1}{j} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{m} \left(\frac{1}{2^{j-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^j} \right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

■

No que segue mostraremos que, para $r > 1$ racional, a série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^r}$ converge. Para tanto, precisamos examinar a convergência de uma **série geométrica**, i.e., uma série da forma

$$\sum_{k\geq 1} q^{k-1},$$

para um certo real não nulo q. Nesse sentido, temos o seguinte resultado importante.

Proposição 3.21. Dado $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a série geométrica $\sum_{k \geq 1} q^{k-1}$ converge se, e só se, $0 < |q| < 1$. Neste último caso, sua soma é igual a $\frac{1}{1-q}$.

Prova. Se $|q| \geq 1$ a série geométrica não converge, uma vez que seu termo geral q^{k-1} não converge para 0. Suponha agora que $0 < |q| < 1$, e seja $s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$. Pela fórmula para a soma dos termos de uma PG finita, temos

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Portanto, para mostrarmos que a série converge para $\frac{1}{1-q}$, basta mostrarmos que $q^n \to 0$ quando $n \to +\infty$, o que fizemos no exemplo 3.3. ■

Chegamos, finalmente, ao exemplo prometido.

Exemplo 3.22. Prove que a série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^r}$ converge, qualquer que seja o racional $r > 1$ fixado[3].

Prova. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, basta mostrarmos que a sequência $(s_n)_{n \geq 1}$ das somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$ é limitada. Para tanto, dado $n \in \mathbb{N}$, tome $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m > n$. Então

$$\begin{aligned}
s_n &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{m-1})^r} + \cdots + \frac{1}{(2^m - 1)^r}\right) \\
&< 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^r} + 4 \cdot \frac{1}{4^r} + \cdots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^{(m-1)r}} \\
&< 1 + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{4^{r-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^{(m-1)(r-1)}} \\
&< \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^{(r-1)k}}.
\end{aligned}$$

[3]Se já tivéssemos definido potências k^r com $r > 0$ real (o que só vamos fazer na seção 5.2), o argumento da prova apresentada funcionaria igualmente bem para mostrar que a série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^r}$ é convergente.

Mas, como $r > 1$, temos $0 < \frac{1}{2^{r-1}} < 1$, e segue da proposição anterior que

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^{(r-1)k}} = \frac{2^{r-1}}{2^{r-1} - 1}.$$

Portanto, concluímos que $0 < s_n < \frac{2^{r-1}}{2^{r-1}-1}$, de sorte que a sequência $(s_n)_{n \geq 1}$ das somas parciais é realmente limitada. ■

Terminemos nossa bateria inicial de exemplos com mais uma aplicação do teorema de Bolzano à convergência de séries. No exemplo a seguir, introduzimos uma das mais importantes constantes da Matemática, o número e, o qual desempenhará papel preponderante na seção 5.1.

Exemplo 3.23. A série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge para um número irracional e, tal que $2 < e < 3$. Em símbolos,

$$e = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}. \tag{3.3}$$

Prova. Seja $(s_n)_{n \geq 0}$ a sequência das somas parciais da série do enunciado, i.e.,

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Para tal sequência, temos claramente $1 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots$; por outro lado, como $k! > 2^{k-1}$ para todo inteiro $k > 2$, temos, para $n \geq 4$ inteiro, que

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{8}{3} + \sum_{k \geq 4} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{35}{12},$$

onde utilizamos a fórmula para a soma de uma série geométrica na última igualdade acima. Portanto, a sequência $(s_n)_{n \geq 0}$ é monótona e limitada, logo convergente, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass.

Agora, segue do item (b) da proposição 3.6, juntamente com $s_2 = 2$ e $s_n < \frac{35}{12}$ para todo inteiro $n \geq 4$, que $2 < e < 3$.

Mostremos, agora, que e é irracional (de modo que, em particular, $e \neq 3$). Para tanto, observe inicialmente que, para naturais $1 < n < m$, temos

$$\begin{aligned} s_m - s_n &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} < \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde utilizamos, uma vez mais, a fórmula para a soma de uma série geométrica na última igualdade.

Portanto, ainda para naturais $1 < n < m$, temos a partir dos cálculos acima que

$$s_m = s_n + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} < s_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1},$$

e segue do item (a) da proposição 3.6 que

$$e = \lim_{m \to +\infty} s_m \leq s_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Assim,

$$s_n < e \leq s_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Multiplicando tal desigualdade por $(n-1)!$ e observando que $s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n!}$, concluímos que

$$(n-1)!s_{n-1} + \frac{1}{n} < (n-1)!e < (n-1)!s_{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{n+2}{n(n+1)^2},$$

Escrevendo $t_n = n!s_n \in \mathbb{N}$ para todo inteiro $n > 1$, e observando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{n+2}{n(n+1)^2} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n(n+1)^2} \\ &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4^2} + \frac{2}{3 \cdot 4^2} = \frac{21}{48} < 1, \end{aligned}$$

para todo inteiro $n > 2$, chegamos, por fim, à estimativa

$$t_{n-1} < (n-1)!e < t_{n-1} + 1,$$

válida para todo inteiro $n > 2$.

Suponha, agora, que fosse $e = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Fazendo $n = q + 1 > 2$ nas desigualdades acima, teríamos

$$t_q < (q-1)!p < t_q + 1,$$

o que é obviamente uma contradição. ■

Alternativamente a (3.3), provaremos na seção 5.1 que

$$e = \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Para uma aproximação de e com cinco casas decimais corretas, veja o problema 5.

Para conhecimento do leitor, observamos que o número e é, de fato, *transcendente*, no sentido da seção 8.1 do volume 6. Uma prova deste fato foge ao escopo destas notas e pode ser encontrada em [21].

Voltando ao desenvolvimento da teoria, a próxima proposição constitui-se na análoga, para séries, da proposição 3.9, e tem por finalidade nos ensinar como operar com séries convergentes.

Proposição 3.24. Se $\sum_{k\geq 1} a_k$ e $\sum_{k\geq 1} b_k$ são séries convergentes e c é um número real qualquer, então:

(a) a série $\sum_{k\geq 1} ca_k$ converge e $\sum_{k\geq 1} ca_k = c\sum_{k\geq 1} a_k$.

(b) a série $\sum_{k\geq 1}(a_k+b_k)$ converge e $\sum_{k\geq 1}(a_k+b_k)=\sum_{k\geq 1}a_k+\sum_{k\geq 1}b_k$.

Prova.
(a) Se s_n é a $n-$ésima soma parcial da série $\sum_{k\geq 1}a_k$, então a $n-$ésima soma parcial da série $\sum_{k\geq 1}ca_k$ é cs_n. Portanto, segue do item (a) da proposição 3.9 que

$$\sum_{k\geq 1}ca_k=\lim_{n\to+\infty}cs_n=c\lim_{n\to+\infty}s_n=c\sum_{k\geq 1}a_k.$$

(b) Se s_n e t_n são respectivamente as somas parciais das séries $\sum_{k\geq 1}a_k$ e $\sum_{k\geq 1}b_k$, então a $n-$ésima soma parcial da série $\sum_{k\geq 1}(a_k+b_k)$ é s_n+t_n. Portanto, o item (b) da proposição 3.9 fornece

$$\sum_{k\geq 1}(a_k+b_k)=\lim_{n\to+\infty}(s_n+t_n)=\lim_{n\to+\infty}s_n+\lim_{n\to+\infty}t_n=\sum_{k\geq 1}a_k+\sum_{k\geq 1}b_k.$$

■

Uma rápida análise dos argumentos apresentados nos exemplos 3.22 e 3.23 fornece o seguinte resultado mais geral, conhecido como o **critério de comparação** para a convergência de séries.

Proposição 3.25. Sejam $(a_k)_{k\geq 1}$ e $(b_k)_{k\geq 1}$ sequências de números reais positivos, tais que $a_k\leq b_k$ para todo $k\geq 1$. Se a série $\sum_{k\geq 1}b_k$ convergir, então a série $\sum_{k\geq 1}a_k$ também convergirá e

$$\sum_{k\geq 1}a_k\leq\sum_{k\geq 1}b_k.$$

Prova. Se $s_n=\sum_{k=1}^n a_k$ e $t_n=\sum_{k=1}^n b_k$, temos $0<s_n\leq t_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como a sequência $(t_n)_{n\geq 1}$ é convergente, ela é limitada. Portanto, a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ é monótona e limitada, logo convergente pelo teorema de Bolzano-Weierstrass. Para o que falta, basta fazer $n\to+\infty$ na desigualdade $s_n\leq t_n$, utilizando em seguida o resultado do problema 1, página 90. ■

Exemplo 3.26. Existe uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ de números reais positivos tal que ambas as séries $\sum_{k\geq 1}a_k$ e $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2a_k}$ convirjam?

Solução. Suponha que sim. Então, o item (b) da proposição 3.24, juntamente com a desigualdade entre as médias, forneceria

$$\sum_{k\geq 1}a_k+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2a_k}=\sum_{k\geq 1}\left(a_k+\frac{1}{k^2a_k}\right)\geq\sum_{k\geq 1}2\sqrt{a_k\cdot\frac{1}{k^2a_k}}=\sum_{k\geq 1}\frac{2}{k}.$$

Logo, pelo critério de comparação para séries, a série harmônica seria convergente, o que é um absurdo. ■

A seguir, discutimos um critério muito útil para a convergência de uma série de números reais positivos com base no comportamento de seus termos, critério este conhecido como o **teste da razão**.

Proposição 3.27. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de reais positivos tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to l$. Se $l<1$, a série $\sum_{k\geq 1}a_k$ converge; se $l>1$, a série $\sum_{k\geq 1}a_k$ diverge.

Prova. Provemos que, se $l<1$, então a série $\sum_{k\geq 1}a_k$ converge (a prova da divergência da série no caso $l>1$ é análoga). Sendo $l<1$, podemos tomar $l<q<1$. Por definição, a convergência $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to l$ garante a existência de $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$n\geq n_0\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q.$$

Portanto, para $n\geq n_0$, temos

$$a_n=a_{n_0}\prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}\leq a_{n_0}q^{n-n_0}.$$

Assim, para $n\geq n_0$, os termos da série $\sum_{k\geq 1}a_k$ são majorados pelos termos da $\sum_{k\geq 1}a_{n_0}q^{n-n_0}$, a qual converge, pelas proposições 3.24 e 3.21. Portanto, segue do critério de comparação que a série $\sum_{k\geq 1}a_k$ é convergente. ■

Nas notações da proposição anterior, observamos que, se $l = 1$, a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ pode convergir ou divergir. De fato, para $a_n = \frac{1}{n}$ temos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \to 1,$$

mas a série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge; por outro lado, para $a_n = \frac{1}{n^2}$ temos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1,$$

mas a série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge.

Para séries $\sum_{k\geq 1} a_k$ com infinitos termos negativos e infinitos termos positivos, os resultados obtidos até o momento nada dizem acerca de sua convergência. Remediamos esta situação a partir de agora, começando com a seguinte

Definição 3.28. *Uma série* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *é* **absolutamente convergente** *se a série* $\sum_{k\geq 1} |a_k|$ *é convergente.*

A utilidade do conceito de série absolutamente convergente é evidenciada na proposição a seguir e no exemplo subsequente.

Proposição 3.29. Toda série absolutamente convergente é convergente.

Prova. Seja $\sum_{k\geq 1} a_k$ uma série absolutamente convergente e, para cada $n \geq 1$, sejam $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $t_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. Dados inteiros $m > n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \\ &\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| \\ &= t_m - t_n. \end{aligned}$$

Como a sequência $(t_n)_{n\geq 1}$ converge, ela é de Cauchy; portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n > n_0 \Rightarrow |t_m - t_n| < \epsilon$. Com tais ϵ e n_0, segue da desigualdade acima que

$$m > n > n_0 \Rightarrow |s_m - s_n| \leq t_m - t_n < \epsilon,$$

de sorte que a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ também é de Cauchy. Logo, pelo teorema 3.16 a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ é convergente, conforme queríamos demonstrar. ■

A recíproca da proposição acima não é válida, quer dizer, há séries convergentes que não são absolutamente convergentes, sendo o exemplo clássico desse fenômeno fornecido pela série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, a qual é convergente (como caso particular do exemplo mais geral a seguir) e tal que a série formada pelos valores absolutos de seus termos (a série harmônica) é divergente.

O exemplo a seguir é devido a G. W. Leibniz[4], sendo conhecido na literatura como o **critério de Leibniz** para a convergência de séries *alternadas*.

Exemplo 3.30 (Leibniz). Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência não crescente de reais positivos, tal que $a_n \to 0$, então a série $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}a_k$ é convergente.

Prova. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. A condição $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots > 0$ garante facilmente que

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots \geq s_6 \geq s_4 \geq s_2. \tag{3.5}$$

Por outro lado, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$|s_{2m-1} - s_{2m}| = a_{2m} \to 0,$$

o que claramente garante, em conjunção com (3.5), que a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy. Logo, $(s_n)_{n\geq 1}$ é convergente, conforme desejado. ■

[4]Gottfried Wilhelm Leibniz, matemático e filósofo do século XVII, é considerado, juntamente com I. Newton, um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral. De fato, algumas das notações que utilizamos até hoje foram criadas já por Leibniz, e resistiram ao teste do tempo.

Problemas – Seção 3.2

1. Dado um número real $a > 1$, prove que a série $\sum_{k\geq 1} \frac{2k-1}{a^k}$ é convergente e calcule sua soma.

2. Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma PA infinita e não constante de termos positivos, prove que:

   (a) A série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{a_k}$ é divergente.

   (b) A série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{a_{2^k}}$ é convergente.

3. (NMC.) Seja A um conjunto finito de naturais da forma $2^a3^b5^c$, para algum terno (a, b, c) de inteiros não negativos. Prove que

$$\sum_{x\in A} \frac{1}{x} < 4.$$

4. Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma sequência de reais positivos e $c > 0$ um número real tal que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que a série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{a_k}$ é divergente.

5. * O objetivo deste problema é provar que $e \approx 2,71828$, com cinco casas decimais corretas. Para tanto, faça os seguintes itens:

   (a) Para $n > 10$ inteiro, prove que

$$\frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \frac{1}{10!}\left(1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \cdots + \frac{1}{11^{n-10}}\right).$$

   (b) Use o item (a), juntamente com o fato de que $10! > 2 \cdot 10^6$, para provar que $0 < e - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k!} < 10^{-6}$.

   (c) Conclua, a partir de (b), que 2,71828 é uma aproximação de e com cinco casas decimais corretas.

6. * Dada uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de algarismos, prove que existe um único elemento $x \in \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição: fixado um erro máximo $\frac{1}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$0 \leq x - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}\right) \leq \frac{1}{10^n},$$

   para todo natural $k \geq n$.

7. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência de números reais positivos definida por $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Prove que a série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{a_k+1}$ converge e

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{a_k + 1} = 2.$$

8. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais positivos, tal que a série $\sum_{k\geq 1} a_k^2$ converge. Prove que, para todo $\alpha > \frac{1}{2}$ racional, a série

$$\sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{k^\alpha}$$

   também converge.

9. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais positivos, tal que a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge. Prove que a série $\sum_{k\geq 1} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ também converge.

10. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de reais positivos tal que $\sqrt[n]{a_n} \to l$.

    (a) Se $l < 1$, prove que a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge.

    (b) Se $l > 1$, prove que a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ diverge.

    (c) Se $l = 1$, dê exemplos mostrando que a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ pode convergir ou divergir.

O critério de convergência de séries dado pelo caso $l < 1$ é conhecido na literatura como o **teste da raiz**.

O critério de convergência de séries dado pelo próximo problema é devido ao matemático norueguês do século XIX Niels Henrik Abel, sendo conhecido na literatura como o **critério de Abel**.

11. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ duas sequências de números reais satisfazendo as seguintes condições:

    (a) A sequência $(s_n)_{n\geq 1}$, definida para $n \in \mathbb{N}$ por $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, é limitada.

    (b) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots > 0$ e $b_n \to 0$.

    Prove que a série $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$ converge.

12. Use o critério de Abel para provar que a série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ é convergente.

13. Mostre que todo $0 < x < 1$ admite uma única expansão decimal da forma $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$, com $a_k \neq 0$ para infinitos valores de k. Em seguida, use este fato para dar um exemplo de função sobrejetora $f : (0,1) \to (0,1) \times (0,1)$.

14. No plano Cartesiano, considere a sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ de pontos tal que $A_1 = (1,0)$ e satisfazendo as seguintes condições:

    (i) OA_nA_{n+1} é retângulo em A_n, tal que $\overline{A_nA_{n+1}} = 1$.

    (ii) $OA_{n+1}A_{n+2}$ tem interior disjunto de OA_nA_{n+1}, para todo $n \geq 1$.

    Prove que, à medida que $n \to +\infty$, a semirreta $\overrightarrow{OA_n}$ dá infinitas voltas em torno da origem.

15. Seja T_n um triângulo retângulo cujos lados medem $4n^2$, $4n^4 - 1$ e $4n^4 + 1$, onde n é um número inteiro positivo. Seja α_n a medida, em radianos, do ângulo oposto ao lado de medida $4n^2$. Mostre que
$$\sum_{k\geq 1} \alpha_k = \frac{\pi}{2}.$$

3.3 O lema de Kronecker

O resultado principal desta seção poderia ter sido visto já no capítulo 1 do volume 1. Postergamo-lo pelo simples fato de que sua demonstração (bem como as aplicações que dele faremos, aqui e a posteriori) é bem mais refinada que o material constante daquele capítulo introdutório, cabendo melhor aqui.

Comecemos recordando a definição a seguir.

Definição 3.31. Um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é **denso** (em $\mathbb{R}$) se, para todo $a \in \mathbb{R}$ e toda aproximação $\epsilon > 0$ dada, tivermos
$$X \cap (a - \epsilon, a + \epsilon) \neq \emptyset.$$

Um resultado bastante útil sobre densidade de subconjuntos de $\mathbb{R}$ é o corolário 3.34 a seguir, conhecido na literatura como o **lema de Kronecker**[5]. A demonstração que apresentamos para o mesmo não é a mais simples possível, mas tem a vantagem de apresentar algumas ideias interessantes em si mesmas[6]. Precisamos primeiro de outra definição.

Definição 3.32. Um subconjunto não vazio G de $\mathbb{R}$ é dito um **subgrupo aditivo** de $\mathbb{R}$ se, para todos $x, y \in G$, tivermos $x - y \in G$.

[5] Após Leopold Kronecker, matemático alemão do século XIX.
[6] Aqui, seguimos, essencialmente, [34].

Evidentemente, $\{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e o próprio $\mathbb{R}$ são subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$. Para um exemplo menos óbvio, dados números reais $x_1, \ldots, x_k$, é imediato verificar (cf. problema 1) que o conjunto

$$G_{x_1,\ldots,x_k} = \{a_1x_1 + \cdots + a_kx_k;\ a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}\} \tag{3.6}$$

é um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$.

Seja, agora, G um subgrupo aditivo arbitrário de $\mathbb{R}$ e tome $x \in G$. Pela definição acima, temos $0 = x - x \in G$. Segue então daí que, para $x, y \in G$, temos $-y = 0 - y \in G$ e, portanto, $x + y = x - (-y) \in G$. Logo, G é fechado para a operação de adição, e uma fácil indução permite mostrar que

$$\{m\alpha;\ m \in \mathbb{Z}\} \subset G,\ \forall\, \alpha \in G. \tag{3.7}$$

O teorema a seguir fornece a caracterização dos subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$ que nos será útil.

Teorema 3.33. Seja $G \neq \{0\}$ um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ e $G_+^* = G \cap \mathbb{R}_+^*$.

(a) Se $\inf(G_+^*) = 0$, então G é denso em $\mathbb{R}$.

(b) Se $\inf(G_+^*) = \alpha > 0$, então $G = G_\alpha$.

Prova.
(a) Suponhamos que $\inf(G_+^*) = 0$, e sejam a um real arbitrário e $\epsilon > 0$ uma aproximação também arbitrária, e provemos que $G \cap (a-\epsilon, a+\epsilon) \neq \emptyset$. Como $x \in G$ se, e só se, $-x \in G$, basta analisarmos o caso $a \geq 0$. Se $a - \epsilon < 0$ temos $0 \in G \cap (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e nada mais há a fazer. Suponhamos, pois, que $a - \epsilon \geq 0$.

A condição $\inf(G_+^*) = 0$ garante a existência de $x \in G_+^*$ tal que $x < 2\epsilon$. Sendo m o maior inteiro não negativo tal que $mx \leq a - \epsilon$, afirmamos que $(m+1)x \in G \cap (a-\epsilon, a+\epsilon)$. De fato, se fosse $(m+1)x \geq a + \epsilon$, teríamos

$$mx \leq a - \epsilon < a + \epsilon \leq (m + 1)x,$$

de sorte que

$$x = (m + 1)x - mx \geq (a + \epsilon) - (a - \epsilon) = 2\epsilon,$$

uma contradição à escolha de x. Portanto, $(m + 1)x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e, como $x, mx \in G$, temos também $(m + 1)x = mx + x \in G$.

(b) Se $\inf(G_+^*) = \alpha > 0$, afirmamos inicialmente que $\alpha \in G_+^*$. Para tanto suponha, por contradição, que $\alpha \notin G_+^*$. Então a definição de ínfimo de um conjunto de números reais garantiria a existência de elementos $\beta, \gamma \in G_+^*$ tais que $\alpha < \beta < \gamma < 2\alpha$. Mas, como G é um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, seguiria daí que $\gamma - \beta \in G_+^*$, com

$$0 < \gamma - \beta < 2\alpha - \alpha = \alpha,$$

o que, por sua vez, contradiria o fato de que $\alpha = \inf(G_+^*)$. Assim, $\alpha \in G_+^*$.

Tome, agora, $x \in G_+^*$ qualquer e faça $q = \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor$ e $r = x - \alpha \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor$, de sorte que $q \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq r < \alpha$ e $x = q\alpha + r$. Se $r > 0$, então o fato de G ser um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ implica $r = x - q\alpha \in G_+^*$, com $0 < r < \alpha$. Mas, como isso contradiz o fato de que $\alpha = \inf(G_+^*)$, concluímos que $r = 0$ e, daí, $x = q\alpha \in G_\alpha$. Portanto,

$$G_+^* \subset \{n\alpha;\ n \in \mathbb{N}\}$$

e, como a inclusão oposta já foi estabelecida em (3.7), temos mesmo

$$G_+^* = \{n\alpha;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Finalmente, como $G = G_+^* \cup \{0\} \cup G_-^*$, com $G_-^* = \{-x;\ x \in G_+^*\}$, é imediato que

$$G = \{m\alpha;\ m \in \mathbb{Z}\} = G_\alpha.$$

■

No corolário a seguir, utilizamos novamente a notação estabelecida em (3.6).

Corolário 3.34 (Kronecker). Se α é um número irracional, então o subgrupo aditivo $G_{1,\alpha} = \{m + n\alpha;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Prova. Por simplicidade de notação, seja $G = G_{1,\alpha}$. Para provar que G é denso em $\mathbb{R}$, pelo teorema anterior é suficiente provar que $\inf(G_+^*) = 0$. Se este não fosse o caso, novamente pelo teorema anterior existiria um real positivo β tal que $\inf(G_+^*) = \beta > 0$ e $G = G_\beta$. Mas, uma vez que α é irracional e tanto α quanto $1 + \alpha$ são elementos de G_+^*, existiriam inteiros não nulos e distintos m e n tais que

$$\alpha = n\beta \ \text{ e } \ 1 + \alpha = m\beta.$$

Logo, por um lado teríamos $\beta = \frac{\alpha}{n} \notin \mathbb{Q}$, ao passo que, por outro, teríamos

$$(m - n)\beta = (1 + \alpha) - \alpha = 1,$$

i.e., $\beta = \frac{1}{m-n} \in \mathbb{Q}$, o que é um absurdo. ■

Nosso próximo corolário refina a conclusão do corolário anterior.

Corolário 3.35. Se α é um número irracional, então os conjuntos a seguir são densos em $\mathbb{R}$:

(a) $A = \{m + n\alpha;\ m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } m < 0 < n\}$.

(b) $B = \{m + n\alpha;\ m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n < 0 < m\}$.

Prova. Sem perda de generalidade, suponha que $\alpha > 0$. Provemos o item (a), sendo a prova do item (b) totalmente análoga. Dados $a \in \mathbb{R}$ e uma aproximação $\epsilon > 0$, queremos provar a existência de $x \in A$ tal que $a - \epsilon < x < a + \epsilon$. Suponha que $a - \epsilon \geq 0$ (os demais casos são análogos) e seja $\delta = \min\{\alpha, 2\epsilon\} > 0$.

Afirmamos primeiro que existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $m < 0 < n$ e $m + n\alpha \in A \cap (0, \delta)$. Por contradição, suponha que

$$m + n\alpha \in A \cap (0, \delta) \Rightarrow n \leq 0.$$

Escolha (pelo corolário anterior) $x_0 = m_0 + n_0\alpha \in A \cap (0, \delta)$, com $n_0 \leq 0$ o maior possível. Como $A \cap (0, x_0)$ é infinito pelo lema de Kronecker, podemos tomar $x_1 = m_1 + n_1\alpha \in A \cap (0, x_0)$, com $n_1 < n_0$. Então

$$x_0 - x_1 = (m_0 - m_1) + (n_0 - n_1)\alpha \in A \cap (0, x_0) \subset A \cap (0, \delta),$$

o que é uma contradição, uma vez que $n_0 - n_1 > 0$. Portanto, podemos escolher $m + n\alpha \in A \cap (0, \delta)$, com $n > 0$. Isto posto, se fosse $m \geq 0$, teríamos $m + n\alpha \geq \alpha \geq \delta$, outra contradição. Logo, $m < 0$ e, daí, $A \cap (0, \delta) \neq \emptyset$.

Tome, agora, $x \in A \cap (0, \delta)$ e considere os números da forma kx, com $k \in \mathbb{Z}_+$. Sendo k_0 o maior inteiro não negativo para o qual $k_0 x \leq a - \epsilon$, afirmamos que $(k_0 + 1)x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. De fato, se fosse $(k_0 + 1)x \geq a + \epsilon$, teríamos

$$k_0 x \leq a - \epsilon < a + \epsilon \leq (k_0 + 1)x$$

e, daí,

$$\delta > x = (k_0 + 1)x - k_0 x \geq (a + \epsilon) - (a - \epsilon) = 2\epsilon,$$

uma contradição à escolha de δ. ■

Exemplo 3.36 (OBM). Sejam π um plano Euclidiano e $f : \pi \to \pi$ uma função tal que

$$d(P, Q) = 1 \Rightarrow d(f(P), f(Q)) = 1,$$

para todos $P, Q \in \pi$. Prove que f é uma **isometria** de π, i.e., prove que, para todos $P, Q \in \pi$, tem-se $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$.

Prova. Para $P \in \pi$, denotemos $f(P)$ sistematicamente por P', de sorte que $d(P,Q) = \overline{PQ}$ e $d(f(P), f(Q)) = \overline{P'Q'}$. Mostremos primeiro que f deve preservar distâncias $\sqrt{3}$.

Afirmação 1.
$$\overline{PQ} = \sqrt{3} \Rightarrow \overline{P'Q'} = \sqrt{3}.$$

De fato, dados dois pontos P e Q do plano tais que $\overline{PQ} = \sqrt{3}$, construa pontos R e S tais que os triângulos QRS e PRS sejam equiláteros de lado 1 (figura 3.1). Gire o losango $PRQS$, com centro em P e no

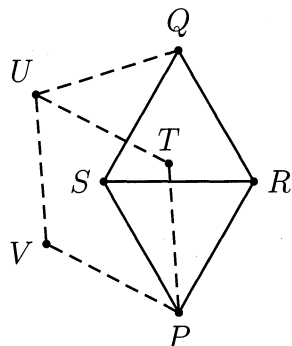



Figura 3.1: $\overline{PQ} = \sqrt{3} \Rightarrow \overline{P'Q'} = \sqrt{3}$.

sentido anti-horário, até obter um losango $PTUV$ para o qual $\overline{QU} = 1$.

Observe que as imagens P', R' e S' de P, R e S formam um triângulo equilátero de lado 1. Como $\overline{Q'R'} = \overline{Q'S'} = 1$, segue que $Q' = P'$ ou $P'R'Q'S'$ é um losango congruente a $PRQS$ (de modo que $\overline{P'Q'} = \sqrt{3}$). Para descartar a primeira possibilidade basta observar que, se $P' = Q'$, então T', U' e V' estão todos sobre o círculo de centro $P' = Q'$ e são vértices de um triângulo equilátero de lado 1, o que é um absurdo.

Afirmação 2. Para todo inteiro positivo n, temos
$$\overline{PQ} = n \Rightarrow \overline{P'Q'} = n.$$

Basta mostrarmos o caso $n = 2$, sendo o caso geral totalmente análogo. Sejam P e Q pontos tais que $\overline{PQ} = 2$, e R o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$, tal que $\overline{PR} = \overline{RQ} = 1$ (figura 3.2). Considere pontos

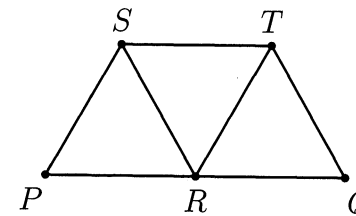



Figura 3.2: $\overline{PQ} = 2 \Rightarrow \overline{P'Q'} = 2$.

S e T tais que PRS, RST e QRT sejam triângulos equiláteros de lado 1, situados em um mesmo semiplano dos determinados pela reta $\overleftrightarrow{PQ}$. Utilizando a Afirmação 1 duas vezes, é imediato que $\overline{P'Q'} = 2$.

Analogamente, podemos provar que
$$\overline{PQ} = n\sqrt{3} \Rightarrow \overline{P'Q'} = n\sqrt{3}.$$

Afirmação 3. $\overline{P'Q'} \geq \overline{PQ}$, para todos os pontos P e Q do plano.

A fim de provar essa afirmação, seja $\overline{PQ} = l$, tal que l não é nem natural nem da forma $n\sqrt{3}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Pelo corolário 3.35 (veja também o problema 2), podemos tomar sequências $(m_k)_{k\geq 1}$ e $(n_k)_{k\geq 1}$ de inteiros satisfazendo as seguintes condições:

i. $m_k < 0 < n_k$, para todo $k \geq 1$;

ii. $\lim_{k\to+\infty}(m_k + n_k\sqrt{3}) = l$;

iii. $\max\{0, l-1\} < m_k + n_k\sqrt{3} < l$, para todo $k \geq 1$.

Vamos mostrar primeiramente que existe um triângulo de lados l, $-m_k$ e $n_k\sqrt{3}$. Para tanto, como $m_k + n_k\sqrt{3} < l$, temos $l + (-m_k) > n_k\sqrt{3}$; também $l + (m_k + n_k\sqrt{3}) > 0$, o que implica $l + n_k\sqrt{3} > -m_k$; finalmente, a partir de $l - 1 < m_k + n_k\sqrt{3}$, temos

$$n_k\sqrt{3} + (-m_k) > n_k\sqrt{3} + m_k + 1 > l.$$

Portanto, a desigualdade triangular garante a existência de um ponto $R \in \pi \setminus \overleftrightarrow{PQ}$ tal que $\overline{PR} = n_k\sqrt{3}$ e $\overline{RQ} = -m_k$; como já temos $\overline{PQ} = l$, nada mais há a fazer.

Segue do que fizemos acima que (cf. figura 3.3) $\overline{P'Q'} + \overline{R'Q'} \geq \overline{P'R'}$ ou, ainda, $\overline{P'Q'} \geq \overline{P'R'} - \overline{R'Q'}$. Mas, como $\overline{P'R'} = n_k\sqrt{3}$ e $\overline{R'Q'} = -m_k$, obtemos $\overline{P'Q'} \geq n_k\sqrt{3} + m_k$. Por outro lado, como $n_k\sqrt{3} + m_k \to l$ quando $k \to +\infty$, segue daí que $\overline{P'Q'} \geq l = \overline{PQ}$.

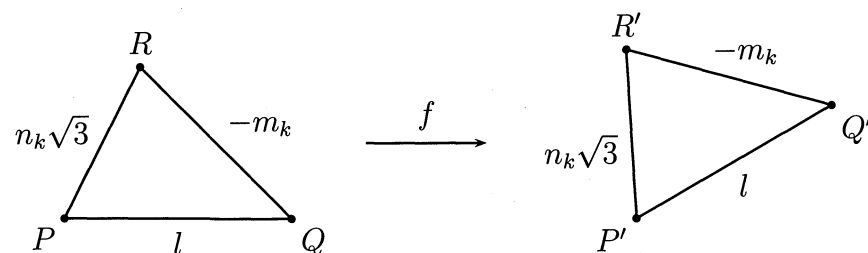



Figura 3.3: $\overline{P'Q'} \geq \overline{PQ}$.

Considere novamente pontos P e Q do plano, com $\overline{PQ} = l$. Com base na reta $\overleftrightarrow{PQ}$ e tendo o ponto P como origem, triangule o plano com triângulos equiláteros de lado 1.

Pelo que fizemos acima, as imagens por f dos vértices dessa triangulação formam uma triangulação análoga do plano. Por outro lado, se X é um vértice arbitrário da triangulação original (cf. figura 3.4), temos $\overline{X'Q'} \geq \overline{XQ}$, para todo ponto Q do plano. Geometricamente, isto significa que Q' não está no interior do círculo de centro X' e raio $\overline{XQ}$. Mas, como isto vale para todo vértice da triangulação, devemos ter necessariamente $\overline{P'Q'} = l$.

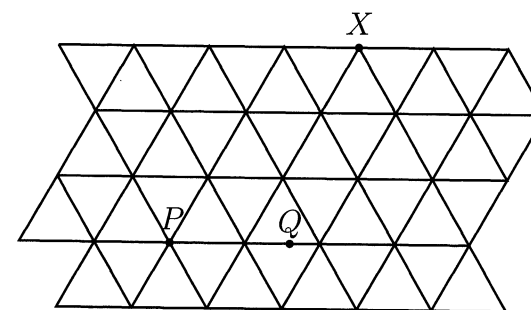



Figura 3.4: $\overline{PQ} = l \Rightarrow \overline{P'Q'} = l$.

■

Problemas – Seção 3.3

1. * Dados números reais $x_1, \ldots, x_k$, verifique que o conjunto

$$G_{x_1,\ldots,x_k} = \{a_1x_1 + \cdots + a_kx_k;\ a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}\}$$

é um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$.

2. * Dados $\alpha, l \in \mathbb{R}$, com α irracional, mostre que existem sequências $(m_k)_{k\geq 1}$ e $(n_k)_{k\geq 1}$ de inteiros satisfazendo as seguintes condições:

   (a) $m_k < 0 < n_k$, para todo $k \geq 1$;

   (b) $\lim_{k\to+\infty}(m_k + n_k\alpha) = l$.

CAPÍTULO 4

Funções Contínuas

Neste capítulo, formalizamos o conceito de função contínua, pensado intuitivamente como uma função cujo gráfico é uma curva *sem interrupções.* Como resultado de nossas discussões, apresentamos critérios suficientes para garantir a continuidade de uma função e, dentre outros resultados importantes, mostramos que toda função contínua possui a *propriedade do valor intermediário.* Por fim, apresentamos várias aplicações interessantes de tal propriedade.

4.1 Definição e exemplos

Consideremos, inicialmente, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \{x\}$ (a função parte fracionária), cujo gráfico está esboçado na figura 4.1. Após um rápido exame, certamente nos sentiríamos confortáveis

em dizer que o gráfico em questão é *descontínuo*, uma alusão à existência de vários *saltos* ao longo do mesmo. Note que isso aparentemente não ocorre com o gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, o qual certamente mereceria ser denominado *contínuo*.

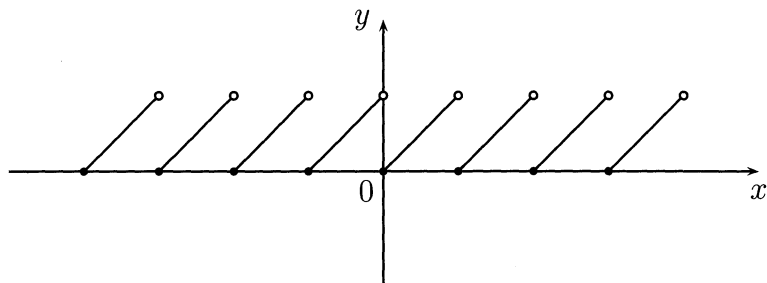



Figura 4.1: gráfico de $f(x) = \{x\}$.

Surge, então, a questão de obter um critério razoável para identificar a existência ou não de tais *saltos* num gráfico, discernindo entre duas possibilidades como as acima descritas. Para desenvolvermos alguma intuição sobre como fazê-lo, restrinjamos o domínio da função $x \mapsto \{x\}$ ao intervalo $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$, denotando a nova função assim obtida ainda por f, por simplicidade de notação; concluímos facilmente que

$$\text{Im}\,(f) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right);$$

em particular, existem valores de y no intervalo de extremos $f(\frac{3}{4})$ e $f(\frac{3}{2})$, por exemplo $y = \frac{5}{16}$, tais que nenhum $x \in [\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$ satisfaz $f(x) = y$.

Por outro lado, é fácil verificar que tal não ocorre com a função g acima; mais precisamente, fixado um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se denotarmos por $g([a, b])$ a imagem da restrição de g a $[a, b]$, i.e.,

$$g([a, b]) = \{g(x) \in \mathbb{R};\ x \in [a, b]\},$$

então, pondo $c = \max\{-a, b\}$, temos

$$g([a, b]) = \begin{cases} [a^2, b^2], & \text{se } 0 \le a < b \\ [0, c^2], & \text{se } a < 0 < b \\ [b^2, a^2], & \text{se } a < b \le 0 \end{cases}.$$

Em particular, para todo y no intervalo de extremos $g(a)$ e $g(b)$, existe $x \in [a, b]$ ($x = \pm\sqrt{y}$, conforme o caso), tal que $g(x) = y$.

Estamos, agora, em posição de generalizar a discussão acima, com a definição a seguir. Para tanto, em tudo o que segue, X denota uma união de intervalos da reta, salvo menção em contrário.

Definição 4.1. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui a **propriedade do valor intermediário** se, para todo intervalo $[a, b] \subset X$ e todo y_0 pertencente ao intervalo de extremidades $f(a)$ e $f(b)$, existir $x_0 \in [a, b]$ tal que $y = f(x)$.

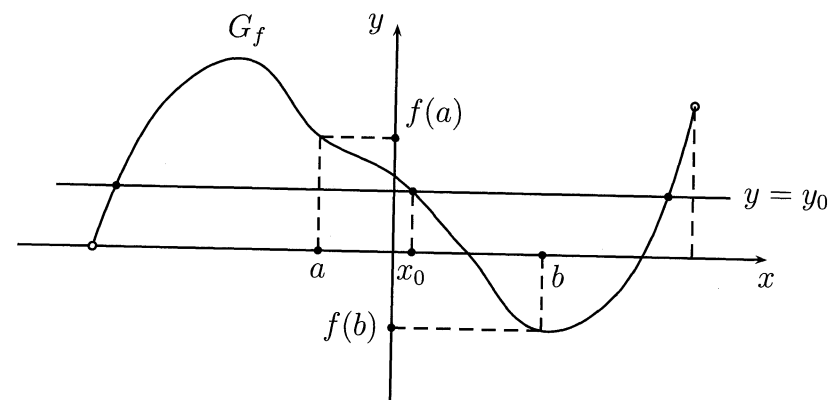



Figura 4.2: a propriedade do valor intermediário.

A discussão acima garante que a função $f(x) = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, não possui a propriedade do valor intermediário, ao passo que a função

$g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, possui tal propriedade. Desse modo, ela aparentemente nos compele a dizer que, se uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui a propriedade do valor intermediário, então f é uma função de gráfico *contínuo*, i.e., sem *saltos*. Todavia, o leitor pode verificar facilmente que a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

satisfaz a propriedade do valor intermediário, mas seu gráfico apresenta um *salto* em $x = 1$, de sorte que f não é o protótipo do que desejamos chamar de função contínua.

A fim de formularmos adequadamente o conceito de função contínua, analisemos a situação sob outro ponto de vista. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função dada, $x_0 \in (a, b)$ fixado e $P_0(x_0, f(x_0)) \in G_f$; para $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$, seja, ainda, $P(x, f(x)) \in G_f$. Para que o gráfico G_f de f mereça ser denominado *contínuo*, nossa intuição diz que, para x próximo a x_0, devemos ter P próximo a P_0.

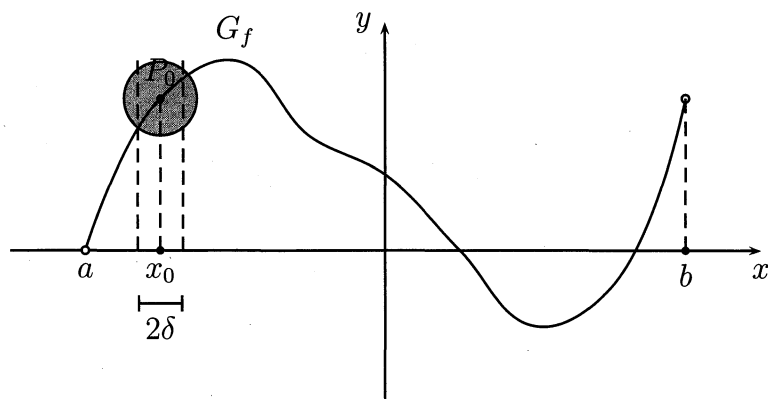



Figura 4.3: ponto de vista correto para função contínua.

Mais precisamente, essa *proximidade* significa (cf. figura 4.3) que,

arbitrado um *erro* $r > 0$ para a posição do ponto P_0 (i.e., arbitrado um disco $D(P_0; r)$, de centro P_0 e raio r), devemos ter $P \in D$ sempre que a abscissa x de P aproximar x_0 com erro suficientemente pequeno, digamos menor que um certo $\delta > 0$ (leia-se *delta*). Em símbolos, arbitrado $r > 0$, deve existir $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \overline{PP_0} < r. \tag{4.1}$$

É possível mostrar (cf. problema 2) que a validade da condição (4.1) equivale à seguinte descrição geométrica alternativa (figura 4.4): arbitrado um erro $\epsilon > 0$ (lê-se *épsilon*) para o *valor de* f em x_0, i.e., arbitrada uma *faixa horizontal*

$$\mathbb{R} \times (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

do plano Cartesiano, simétrica em relação ao ponto $P_0(x_0, f(x_0))$, deve existir outro erro $\delta > 0$ tal que, para $x \in X$ satisfazendo $|x - x_0| < \delta$, o ponto $P(x, f(x))$ pertença à faixa em questão. Isto posto, podemos finalmente enunciar a definição formal de função contínua.

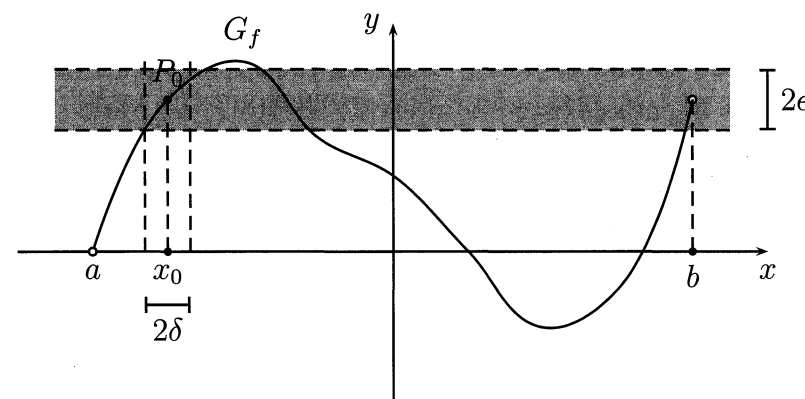



Figura 4.4: elaborando o ponto de vista correto para função contínua.

Em tudo o que segue, salvo menção explícita em contrário $X \subset \mathbb{R}$ denota uma união de intervalos e $I \subset \mathbb{R}$ denota um intervalo.

Definição 4.2. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **contínua em um ponto** $x_0 \in X$ se a seguinte condição for satisfeita: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \quad (4.2)$$

A função f é dita **contínua** se o for em todo $x_0 \in X$.

Em que pese a discussão geométrica anterior, ao ler a definição acima, quase certamente restou ao leitor a impressão de que ela é pouco palatável. Sendo esse o caso, recomendamos adiar o embate com os épsilons e deltas envolvidos para a seção 6.1, quando o conceito mais geral de *limite de uma função num ponto* será discutido em detalhe; exceto pela discussão de alguns exemplos e prova de uns poucos resultados (quase todos heuristicamente plausíveis à luz da discussão geométrica supracitada), tal atitude não resultará em perda apreciável de continuidade da exposição.

Provaremos mais adiante (cf. proposição 4.27) que, se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $x_0 \in X$, então as funções $f \pm g, f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ também são contínuas em x_0. Também provaremos mais adiante que, se $g(x_0) \neq 0$, então existe um intervalo aberto I, centrado em x_0 e tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X \cap I$. Nesse caso, mostraremos ainda que a função $\frac{f}{g} : X \cap I \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0. Por ora, assumiremos as afirmações acima sem demonstração, utilizando-as para apresentar alguns exemplos relevantes de funções contínuas[1].

Exemplo 4.3. A função identidade $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e toda função constante são contínuas.

[1] Também mostraremos mais adiante (cf. teorema 4.15) que toda função contínua satisfaz a propriedade do valor intermediário.

Prova. Vamos mostrar que a função identidade é contínua, deixando a prova da continuidade das funções constantes a cargo do leitor. Temos que mostrar que Id é contínua em x_0, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$; para tanto, de acordo com a definição 4.2, dado $\epsilon > 0$, devemos ser capazes de encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\mathrm{Id}(x) - \mathrm{Id}(x_0)| < \epsilon.$$

Mas isso é o mesmo que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon,$$

de sorte que podemos tomar qualquer $\delta \in (0, \epsilon]$. ■

Exemplo 4.4. O exemplo 4.3 garante, juntamente com a discussão do parágrafo que o precede, que toda função do tipo $x \mapsto ax^k$ ($a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$) é contínua. Portanto, também é contínua toda soma finita de funções desse tipo, i.e., toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

para certos $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Uma tal função é dita **polinomial**.

Exemplo 4.5. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial como no exemplo anterior, dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma **raiz** de f se $f(x_0) = 0$. Provaremos, no capítulo 3 do volume 6, que o conjunto das raízes de uma função polinomial é finito. Portanto, se f e g são funções polinomiais e $\mathcal{R}_g = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_k\}$ é o conjunto das raízes de g, o conjunto

$$\mathbb{R} \setminus \mathcal{R}_g = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \ldots \cup (x_{k-1}, x_k) \cup (x_k, +\infty)$$

é uma união finita de intervalos abertos, no qual fica bem definida a função

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \mathcal{R}_g \to \mathbb{R}.$$

Uma tal função é dita **racional**, e o exemplo anterior, juntamente com a discussão no parágrafo que precede o exemplo 4.3, garante que funções racionais são contínuas, onde estiverem definidas.

Antes de apresentar mais exemplos, precisamos do seguinte

Lema 4.6. Se $c > 0$ é uma constante e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \forall x, y \in I, \tag{4.3}$$

então f é contínua[2].

Prova. De fato, fixados $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Mas, uma vez que $|f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0| < c\delta$ para $|x - x_0| < \delta$, basta tomarmos $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ para que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. ■

Exemplo 4.7. A função modular $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, é contínua pelo lema anterior. De fato, segue da desigualdade triangular que, para $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Exemplo 4.8. A função raiz quadrada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$, é contínua. De fato, seja dado $\epsilon > 0$. Se $x_0 = 0$, então $|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{x} < \epsilon$, contanto que $0 \leq x < \epsilon^2$; portanto, nesse caso basta tomar $\delta = \epsilon^2$. Se $x_0 > 0$ e $x > \frac{x_0}{4}$, então $\sqrt{x} > \frac{\sqrt{x_0}}{2}$, de sorte que

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{2}{3\sqrt{x_0}}|x - x_0|;$$

[2]Uma função que satisfaz (4.3) é dita **Lipschitziana**, em homenagem ao matemático alemão do século XIX Rudolf Lipschitz.

logo, f satisfaz uma condição do tipo (4.3) no intervalo $[\frac{x_0}{2}, +\infty)$, e um argumento análogo ao da prova do lema 4.6 garante a continuidade de f em x_0.

Precisamos, agora, do seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.9. Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|\text{sen}\, x| \leq |x|$.

Prova. Mostremos inicialmente que $\text{sen}\, x \leq x$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Tal desigualdade é óbvia para $x = 0$; para $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, marque, na figura 4.5, o arco anti-horário $\overset{\frown}{AP}$ de comprimento $\ell(\overset{\frown}{AP}) = x$.

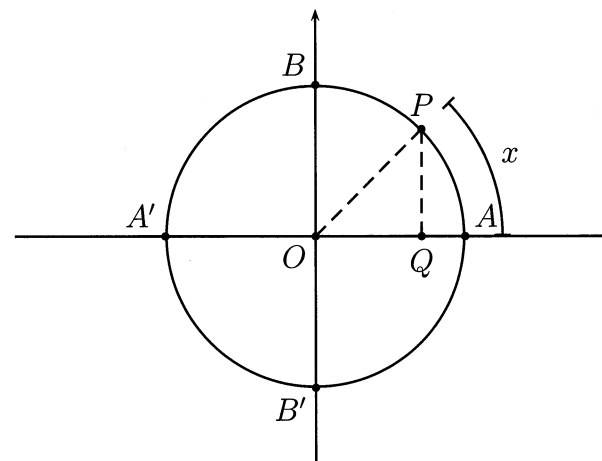



Figura 4.5: $|\text{sen}\, x| \leq |x|$.

Se Q é o pé da perpendicular baixada de P à reta $\overleftrightarrow{AA'}$, então

$$\text{sen}\, x = \overline{PQ} < \ell(\overset{\frown}{AP}) = x.$$

Agora, como $\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\, x$, segue imediatamente que $|\text{sen}\, x| \leq |x|$ para $|x| \leq \frac{\pi}{2}$; mas, como $|\text{sen}\, x| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, temos que $|\text{sen}\, x| \leq |x|$ para $|x| > \frac{\pi}{2}$ e, daí, para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

De posse do lema acima, o lema 4.6 garante a continuidade das funções seno e cosseno, conforme ensina o próximo exemplo.

Exemplo 4.10. As funções seno e cosseno são contínuas. De fato, a partir das fórmulas de transformação em produto e do lema anterior, temos para $x, y \in \mathbb{R}$ que

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos y| &= 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| \\ &= |x-y|. \end{aligned}$$

Portanto, o lema 4.6 garante a continuidade da função cosseno, e o argumento para a função seno é totalmente análogo.

Terminamos esta seção examinando a continuidade de uma composição. O resultado da proposição a seguir é conhecido como a **regra da cadeia** para funções contínuas.

Proposição 4.11. Se $X, Y \subset \mathbb{R}$ são uniões de intervalos e $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ também é contínua.

Prova. Sejam $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$. Dado $\epsilon > 0$, a continuidade de g garante a existência de $\delta > 0$ tal que

$$y \in Y,\ |y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon. \qquad (4.4)$$

Por outro lado, a continuidade de f garante a existência de $\delta' > 0$ tal que

$$x \in X,\ |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |\underbrace{f(x)}_{y} - \underbrace{f(x_0)}_{y_0}| < \delta.$$

Portanto, segue das relações acima (com $y = f(x)$ em (4.4)) que

$$x \in X,\ |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon,$$

o que estabelece a continuidade da função $g \circ f$. ■

O exemplo a seguir mostra um uso típico da regra da cadeia para funções contínuas.

Exemplo 4.12. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ é contínua. De fato, se $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as funções dadas por $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $h(x) = x^2$, então g e h são contínuas e $f = g \circ h$; portanto, f é contínua pela regra da cadeia.

Problemas – Seção 4.1

1. Prove que:

   (a) A função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ possui a propriedade do valor intermediário e é contínua, mas a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
   não possui tal propriedade.

   (b) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
   não possui a propriedade do valor intermediário.

2. * Prove que toda função contínua no sentido da relação (4.1) é contínua no sentido da definição 4.2, e vice-versa.

3. * Se $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, use o exemplo e a discussão no parágrafo que precede o exemplo 4.3 para estabelecer a continuidade da função tangente,
   $$\begin{aligned} \operatorname{tg} : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{tg} x \end{aligned}.$$

4. * Para $n \in \mathbb{N}$, prove que a função $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x > 0$, satisfaz uma desigualdade do tipo (4.3) em cada intervalo $[a,b] \subset (0,+\infty)$. Conclua, a partir daí, que f é contínua.

5. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, explique por que a função $|f| : I \to \mathbb{R}$ também é contínua.

6. Explique por que a função $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4-2x^3+1}{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$, é contínua.

7. Justifique a continuidade da função $f : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada, para $x > -1$, por $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^3+2}$.

4.2 O teorema do valor intermediário

Nesta seção, mostramos que funções contínuas definidas num intervalo $[a,b]$ satisfazem a propriedade do valor intermediário e apresentamos várias aplicações desse fato. Comecemos enunciando e provando o **lema de permanência do sinal** para funções contínuas.

Lema 4.13. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $x_0 \in I$ é tal que $f(x_0) > 0$ (resp. $f(x_0) < 0$), então existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \text{ (resp. } f(x) < -\frac{f(x_0)}{2}).$$

Em particular, f ainda é positiva (resp. negativa) em $I \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Prova. Façamos a prova no caso em que $f(x_0) > 0$, sendo a prova no outro caso totalmente análoga. A definição de continuidade garante que, para $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

Mas, a última desigualdade acima acarreta que

$$f(x) - f(x_0) > -\frac{f(x_0)}{2},$$

o que é o mesmo que $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$, para todo $x \in I$ tal que $|x - x_0| < \delta$. ■

Uma aplicação judiciosa do lema acima é o que nos permite provar a propriedade do valor intermediário para funções contínuas definidas num intervalo $[a,b]$. Começamos com um caso especial da mesma, conhecido como o **teorema de Bolzano**[3], para o qual o leitor pode achar conveniente revisar a definição e as propriedades elementares do supremo de um conjunto não vazio e limitado superiormente de números reais (cf. capítulo 1 do volume 1).

Teorema 4.14 (Bolzano). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Prova. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$, e seja

$$A = \{x \in [a,b];\ f \text{ é negativa no intervalo } [a,x]\}.$$

Como $a \in A$ por hipótese, temos $A \neq \emptyset$. Por outro lado, A é limitado (uma vez que $A \subset [a,b]$) e, portanto, existe $c = \sup A$.

Note inicialmente que $c > a$, pelo lema de permanência do sinal. De fato, se fosse $f(a) < 0$, teríamos, de acordo com aquele resultado, a existência de $0 < \delta < b - a$ tal que $f(x) < 0$ para $x \in [a, a+\delta)$ e, daí, $c \geq a + \delta$.

Agora, afirmamos que $f(c) = 0$. Por contradição, suponha primeiro que $f(c) < 0$. Então $c < b$ (uma vez que $f(b) > 0$) e, novamente pelo lema de permanência do sinal, existiria $0 < \delta < b - c$ tal que f seria negativa em $(c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$. Mas, como $c = \sup A$, podemos

[3]Após Bernard Bolzano, matemático alemão dos séculos XVIII e XIX.

tomar $d \in (c-\delta, c) \cap A$, de sorte que $f < 0$ em $[a, c_1]$; portanto, teríamos $f < 0$ em $[a, d] \cup (c-\delta, c+\frac{\delta}{2}] = [a, c+\frac{\delta}{2}]$, contradizendo o fato de ser $c = \sup A$. Por outro lado, se $f(c) > 0$, existiria $\delta > 0$ tal que f seria positiva em $(c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$; em particular, $A \cap (c-\delta, c] = \emptyset$ e, daí, teríamos $\sup A \leq c - \delta$, uma nova contradição. Logo, a única possibilidade é termos $f(c) = 0$. ■

O teorema a seguir é conhecido como o **teorema do valor intermediário**. Como é costume na literatura, doravante nos referiremos ao mesmo simplesmente como o **TVI**.

Teorema 4.15 (TVI). Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$ (ou vice-versa), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$. Em particular, se um real d pertence ao intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Prova. Para a primeira afirmação, note que a função $h = f - g$ é contínua e tal que $h(a)h(b) = (f(a)-g(a))(f(b)-g(b)) < 0$. Portanto, o teorema de Bolzano garante a existência de $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$, i.e., tal que $f(c) = g(c)$. O caso particular em questão é obtido fazendo g igual à função constante e igual a d em $[a, b]$. ■

No que segue, discutimos algumas aplicações interessantes do TVI.

Exemplo 4.16. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua. Prove que existe um real $0 \leq c \leq 1$ tal que $f(c) = c$ (i.e., que f tem pelo menos um ponto fixo).

Prova. Se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, nada há a fazer; senão, $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Considerando a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$, temos, então, $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$, e o TVI garante a existência de $0 < c < 1$ tal que $f(c) = g(c)$ (ou, o que é o mesmo, $f(c) = c$). ■

Exemplo 4.17. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ e n ímpar, então a imagem de f é o conjunto de todos os números reais. Em particular, f possui pelo menos uma raiz real.

Prova. Dado $d \in \mathbb{R}$, faça $g(x) = f(x) - d$. Então $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é polinomial, e basta garantirmos a existência de $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(c) = 0$.

O argumento do parágrafo anterior reduz nosso problema a mostrar a existência de $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$. Para tanto, suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_n > 0$. Então, para $x \neq 0$, repetidas aplicações da desigualdade triangular fornecem

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x^n} &= a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \\
&\geq a_n - \left|\frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right| \\
&\geq a_n - \left|\frac{a_{n-1}}{x}\right| - \cdots - \left|\frac{a_1}{x^{n-1}}\right| - \left|\frac{a_0}{x^n}\right| \\
&= a_n - \frac{|a_{n-1}|}{|x|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|x|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|x|^n}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $|x| \geq 1$, então $|x| \leq |x|^2 \leq \cdots \leq |x|^n$ e, daí,

$$\frac{f(x)}{x^n} \geq a_n - \frac{1}{|x|} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|,$$

o qual, por sua vez, é positivo para $|x| > \frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|$.

Em resumo, se

$$A > \max\left\{1, \frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\right\},$$

então $\frac{f(x)}{x^n} > 0$ para $x = \pm A$. Mas, como n ímpar, segue que $f(-A) < 0 < f(A)$ e o TVI garante a existência de $c \in [-A, A]$ tal que $f(c) = 0$. ■

Exemplo 4.18 (Romênia). Existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(x+1) \notin \mathbb{Q}?$$

Solução. Suponha que exista uma tal f e defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Então, g é contínua (pela regra da cadeia para funções contínuas) e, pela condição do enunciado, transforma todo número real num irracional. Mas, como todo intervalo não degenerado contém números racionais (cf. problema 1.5.2 do volume 1), a fim de não obtermos uma contradição ao TVI a única possibilidade é g ser constante. Assim, existe um número irracional α tal que $f(x+1) - f(x) = \alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e, daí,

$$f(x+2) - f(x) = f(x+2) - f(x+1) + f(x+1) - f(x) = 2\alpha, \quad (4.5)$$

também para todo $x \in \mathbb{R}$.

Afirmamos, agora, que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \in \mathbb{Q}$; de fato, tome um real qualquer a; se $f(a)$ não for racional, segue de nossas hipóteses que $f(a+1)$ será racional e basta, então, tomar $x_0 = a$ ou $x_0 = a+1$. Por outro lado, fixado um tal x_0, nossas hipóteses asseguram que

$$f(x_0) \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x_0+1) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(x_0+2) \in \mathbb{Q}.$$

Logo, $f(x_0+2) - f(x_0) \in \mathbb{Q}$, o que contradiz (4.5) e termina a demonstração. ∎

Para o exemplo a seguir, recorde que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *par* se $f(-x) = f(x)$, para todo real x.

Exemplo 4.19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(f(x)) = x^2 + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que f é par.

Prova. Note inicialmente que, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} f(f(x)) = x^2 + 1 &\Rightarrow f(f(f(x))) = f(x^2+1) \\ &\Rightarrow f(x)^2 + 1 = f(x^2+1) \\ &\Rightarrow f(x)^2 + 1 = f(-x)^2 + 1 \\ &\Rightarrow f(x) = \pm f(-x) \end{aligned}$$

Agora, se $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, então

$$\alpha^2 + 1 = f(f(\alpha)) = f(0) = f(f(\beta)) = \beta^2 + 1,$$

de modo que f tem no máximo dois zeros. Há três possibilidades:

- $f(x) \neq 0$, para todo real x: pelo TVI, f tem sinal constante em $\mathbb{R}$. Mas, como $f(x) = \pm f(-x)$ para todo real x, segue que $f(x) = f(-x)$ para todo real x, e f é par.

- f tem um único zero, digamos em $x = \alpha$: como $f(-\alpha) = \pm f(\alpha) = 0$, devemos ter $\alpha = -\alpha$, de modo que $\alpha = 0$. Mas, daí,

$$f(f(0)) = 0^2 + 1 = 1 \Rightarrow f(0) \neq 0,$$

o que é uma contradição.

- f tem exatamente dois zeros, em $x = \alpha$ e $x = -\alpha$, para algum $\alpha > 0$: pelo TVI, f tem sinal constante no intervalo $(-\alpha, \alpha)$. Considere a função $g(x) = f(x) - x$. Se $f > 0$ em $(-\alpha, \alpha)$, então

$$g(0) = f(0) - 0 > 0 \ \text{ e } \ g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = -\alpha < 0,$$

de modo que existe $0 < c < \alpha$ tal que $g(c) = 0$. Se $f < 0$ em $(-\alpha, \alpha)$, então

$$g(0) = f(0) - 0 < 0 \ \text{ e } \ g(-\alpha) = f(-\alpha) - (-\alpha) = \alpha > 0,$$

de modo que existe $-\alpha < c < 0$ tal que $g(c) = 0$. Em qualquer caso, f admite um ponto fixo c. Mas

$$f(c) = c \Rightarrow c = f(f(c)) = c^2 + 1 \Rightarrow c^2 - c + 1 = 0,$$

o que é um absurdo, haja vista tal equação não possuir raízes reais. ■

Exemplo 4.20. Sejam $m, n \geq 1$ inteiros fixados. Calcule, para $x > 0$, o número de soluções da equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^m} = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \cdots + \sqrt[n]{x}.$$

Solução. Afirmamos que a equação acima admite somente uma solução. Primeiramente, note que, para $x > 0$ e k inteiro positivo, a função $x \mapsto \frac{1}{x^k}$ é decrescente, ao passo que a função $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ é crescente. Mas, como uma soma de funções crescentes de mesmo domínio é crescente e uma soma de funções decrescentes de mesmo domínio é decrescente (prove este fato!), concluímos que as funções $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^m} \quad \text{e} \quad g(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \cdots + \sqrt[n]{x}$$

são, respectivamente, decrescente e crescente. Como as soluções da equação do enunciado correspondem aos valores positivos de x tais que $f(x) = g(x)$, o problema 1, página 52, garante que tal equação tem, no máximo, uma solução.

Para mostrarmos que há de fato alguma solução, vamos usar o TVI, observando inicialmente que f e g são claramente contínuas em $(0, +\infty)$. Para tanto, consideremos dois casos separadamente:

- para $x > 1$, temos

$$\frac{1}{x^m} < \frac{1}{x^{m-1}} < \cdots < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad x > \sqrt{x} > \cdots > \sqrt[n-1]{x} > \sqrt[n]{x},$$

de maneira que $f(x) < \frac{m}{x}$ e $g(x) > n\sqrt[n]{x}$. Em particular, $f(x) < g(x)$ se $\frac{m}{x} < n\sqrt[n]{x}$, i.e., se $x > \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$. Portanto, $f(x) < g(x)$ para $x > \max\left\{1, \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right\}$.

- para $0 < x < 1$, temos

$$\frac{1}{x^m} > \frac{1}{x^{m-1}} > \cdots > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad x < \sqrt{x} < \cdots < \sqrt[n-1]{x} < \sqrt[n]{x},$$

de maneira que $f(x) > \frac{m}{x}$ e $g(x) < n\sqrt[n]{x}$. Em particular, $f(x) > g(x)$ se $\frac{m}{x} > n\sqrt[n]{x}$, i.e., se $x < \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$. Portanto, $f(x) > g(x)$ para $0 < x < \min\left\{1, \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right\}$.

Finalmente, a discussão acima garante que podemos tomar reais $0 < a < 1 < b$ tais que $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$, de maneira que o TVI garante a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$. ■

Terminamos esta seção utilizando o TVI para estudar a continuidade da inversa de uma função contínua cujo domínio é um intervalo.

Teorema 4.21. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo (resp. aberto, fechado ou semiaberto) e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é injetiva se, e somente se, f é crescente ou decrescente. Ademais, em um qualquer desses casos temos que:

(a) a imagem de f é um intervalo J (resp. aberto, fechado ou semiaberto);

(b) $f^{-1} : J \to I$ é contínua.

Prova. Se f não é injetiva, então f claramente não pode ser nem crescente, nem decrescente. Reciprocamente, se f não é nem crescente, nem decrescente, então existem $a < b < c$ em I tais que $f(a) \leq f(b) \geq$

$f(c)$ ou $f(a) \geq f(b) \leq f(c)$. Suponha que $f(a) \leq f(b) \geq f(c)$ (o outro caso é análogo) e escolha $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\max\{f(a), f(c)\} \leq d \leq f(b).$$

O TVI garante a existência de $x_0 \in (a, b)$ e $x_1 \in (b, c)$ (logo $x_0, x_1 \in I$) tais que $f(x_0) = d$ e $f(x_1) = d$, de modo que $f(x_0) = f(x_1)$. Em particular, f não é injetiva.

Para o item (a), suponha f crescente e $I = (a, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ (os demais casos são totalmente análogos). Para cada intervalo $[c, d] \subset (a, b)$, o TVI e o fato de f ser crescente garantem que a imagem por f do intervalo $[c, d]$ é o intervalo $[f(c), f(d)]$. Mas, como

$$(a, b) = \bigcup_{n \geq 1} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right],$$

é imediato verificar que

$$\text{Im}\,(f) = \bigcup_{n \geq 1} \left[f\left(a + \frac{1}{n}\right), f\left(b - \frac{1}{n}\right)\right] = (c, d),$$

onde $c = \inf\{f(x);\ x \in (a, b)\}$ e $d = \sup\{f(x);\ x \in (a, b)\}$.

Mostremos por fim o item (b), supondo ainda que $f : (a, b) \to (c, d)$ é crescente. Então (cf. problema 5, página 43), $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ é crescente. Agora, fixado $y_0 \in (c, d)$, seja $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Dado $\epsilon > 0$, queremos $\delta > 0$ tal que

$$y \in (c, d),\ |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon. \qquad (4.6)$$

Para tanto, seja $\delta_0 = \min\{y_0 - c, d - y_0\}$ e suponha, inicialmente, que $0 < \delta < \delta_0$ (de sorte que a condição $|y - y_0| < \delta$ seja suficiente para garantir que $y \in (c, d)$). Denotando $x = f^{-1}(y)$, temos $y = f(x)$ e podemos reescrever (4.6) da seguinte forma: queremos $0 < \delta < \delta_0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon.$$

Observe que podemos supor $\epsilon > 0$ tão pequeno que $x_0 \pm \epsilon \in (a, b)$ (senão, diminua o $\epsilon > 0$ dado, de forma que essa condição seja satisfeita). Lembrando que f é crescente, tome

$$0 < \delta < \min\{\delta_0, f(x_0 + \epsilon) - f(x_0), f(x_0) - f(x_0 - \epsilon)\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) < \delta \ &\Rightarrow\ f(x) - f(x_0) < f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) \\ &\Rightarrow\ f(x) < f(x_0 + \epsilon) \Rightarrow x < x_0 + \epsilon \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$f(x) - f(x_0) > -\delta \Rightarrow x > x_0 - \epsilon.$$

Em qualquer caso, a escolha acima para δ garante que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| < \delta \ &\Rightarrow\ -\delta < f(x) - f(x_0) < \delta \\ &\Rightarrow\ -\epsilon < x - x_0 < \epsilon \\ &\Rightarrow\ |x - x_0| < \epsilon, \end{aligned}$$

conforme desejado. ■

Como primeira aplicação do teorema acima, damos uma prova alternativa para o problema 4, página 128.

Exemplo 4.22. Para $n \in \mathbb{N}$, a **função potência n-ésima** é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$. Se n é par, denote ainda por f a restrição $f : [0 + \infty) \to \mathbb{R}$; como f é contínua, crescente e $f(k) = k^n > k$ para $k \in \mathbb{N}$, temos pelo TVI que $\text{Im}\,(f) = [0, +\infty)$, e o teorema anterior garante a (boa definição e a) continuidade da função

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ [0, +\infty) &\longrightarrow [0, +\infty) \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}.$$

Analogamente, se n é ímpar, então f é contínua, crescente, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ e

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

é contínua. Em qualquer um dos casos acima, a função f^{-1} é denominada a **função raiz n-ésima**.

O próximo exemplo introduz inversas para restrições apropriadas das funções seno, cosseno e tangente.

Exemplo 4.23. A restrição da função seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, que também denotaremos por $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, é uma bijeção contínua e crescente. A **função arco-seno** é sua inversa $\text{arcsen} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, de sorte que, para $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$\text{arcsen}\, x = y \Leftrightarrow \text{sen}\, y = x.$$

Observe ainda que, graças ao teorema 4.21, a função arco-seno é crescente e contínua.

Denote também por cos a restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$, de modo que $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ é uma bijeção contínua e decrescente. A **função arco-cosseno** é sua inversa $\text{arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, a qual é contínua (novamente pelo teorema 4.21) e decrescente. Veja também que, para $x \in [0, \pi]$ e $y \in [-1, 1]$, temos

$$\text{arccos}\, x = y \Leftrightarrow \cos y = x.$$

Por fim, a restrição da função tangente ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é uma bijeção contínua $\text{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, de sorte que sua inversa, a função $\text{arctg} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é contínua e crescente. Também, temos

$$\text{arctg}\, x = y \Leftrightarrow \text{tg}\, y = x.$$

Problemas – Seção 4.2

1. A função contínua $f : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in (-\infty, 1) \\ x^2 + 1, & \text{se } x \in (1, +\infty) \end{cases},$$

satisfaz $f(0) < \frac{3}{2} < f(2)$, mas não existe c no domínio de f tal que $f(c) = \frac{3}{2}$. Por que esse exemplo não contraria o TVI?

2. Calcule o número de soluções reais de cada uma das equações abaixo:

   (a) $|x| + 1 = x^4$.

   (b) $\cos x = x^2$.

   (c) $\text{sen}\, x = \frac{x}{4}$.

3. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 \text{sen}\, x$ é tal que seu gráfico intersecta toda reta não vertical em um conjunto infinito de pontos.

4. Dado $n > 1$ inteiro, explicite uma função contínua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ com exatamente n pontos fixos.

5. (Bulgária.) Sejam $n > 1$ inteiro e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos dados. Prove que a equação

$$\sqrt{1 + a_1 x} + \sqrt{1 + a_2 x} + \cdots + \sqrt{1 + a_n x} = nx$$

possui exatamente uma solução real positiva.

6. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais escolhidos do intervalo $[0, 1]$. Prove que existe $x \in [0, 1]$ tal que

$$|x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n| = \frac{n}{2}.$$

7. (Leningrado.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo, para todo $x \in \mathbb{R}$, a relação $f(x)f(x+2) + f(x+1) = 0$. Mostre que existem infinitos valores reais de x tais que $f(x) = 0$.

8. (Leningrado.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x)f(f(x)) = 1$, para todo real x. Se $f(1000) = 999$, calcule $f(500)$.

9. (Austrália.) Encontre todos os $a \in \mathbb{R}$ tais que, para toda função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfazendo a condição $f(0) = f(1)$, exista $x_0 \in [0, 1-a]$ para o qual $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+1)f(f(x)+1)+1 = 0$, para todo real x. Prove que f não é contínua.

11. Encontre todas as funções contínuas $f : [0,1] \to [0,1]$ tais que $(f \circ f)(x) = x$, para todo $x \in [0,1]$.

12. * Sejam dados um intervalo I e um subconjunto não vazio J de I, tendo as seguintes propriedades:

    (a) Para todo $x_0 \in J$, existe $\delta > 0$ tal que $(x-\delta, x_0+\delta) \cap J \subset I$.

    (b) Se $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de pontos de J e $l \in I$ é tal que $a_n \to l$, então $l \in J$.

    Mostre que $J = I$.

13. * Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, tal que $f(r) \geq 0$ para todo racional diádico $r \in [0,1]$, prove que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [0,1]$.

14. Se α é um irracional dado, encontre todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\alpha),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

15. (Crux.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que assume valores positivos e negativos. Dado $k > 2$ natural, prove que existem reais $a_1, a_2, \ldots, a_k$ em progressão aritmética e tais que

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_k) = 0.$$

16. (Torneio das Cidades.) Prove que, para cada natural n, o gráfico de qualquer função contínua e crescente $f : [0,1] \to [0,1]$ pode ser coberto por n retângulos, cada um dos quais de área $\frac{1}{n^2}$ e lados paralelos aos eixos coordenados.

17. (Leningrado.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que, para todo real x, tenhamos $f(x + f(x)) = f(x)$. Prove que f é constante.

18. (Bielorrússia.) Encontre todas as funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tenhamos

$$f(x + y^3) + g(x^3 + y) = h(xy).$$

4.3 Continuidade sequencial

Nesta seção, relacionamos os conceitos de limite de uma sequência convergente e continuidade de uma função. O resultado principal é a proposição a seguir, a qual será utilizada diversas vezes no que segue. Em palavras, ela assegura que funções contínuas são caracterizadas pela propriedade de transformarem sequências convergentes em sequências convergentes.

Em tudo o que segue, I denota um intervalo da reta.

Proposição 4.24. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua se, e só se, a seguinte condição for satisfeita: para todo $a \in I$ e toda sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ de elementos de I, temos

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(a).$$

Prova. Inicialmente, suponha que f é contínua. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Seja, agora, $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de elementos de I, convergindo para $a \in I$. Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \delta.$$

Logo, a conjunção das duas condições acima garante que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - f(a)| < \epsilon,$$

o que é o mesmo que dizer que $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$.

Reciprocamente, suponha que f não é contínua em $a \in I$. Então, a negação da definição de continuidade garante a existência de $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, temos $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$ para algum $x \in I$ satisfazendo $|x - a| < \delta$. Em particular, tomando $n \in \mathbb{N}$ e $\delta = \frac{1}{n}$, verificamos a existência de $a_n \in I$ tal que

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(a_n) - f(a)| \geq \epsilon.$$

Em particular, segue das condições acima que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ assim construída converge para a, ao passo que a sequência $(f(a_n))_{n\geq 1}$ não converge para $f(a)$. ■

Ilustramos a importância da proposição acima em dois exemplos, o primeiro dos quais fornece outra prova para o resultado do exemplo 3.12.

Exemplo 4.25. Se $a > 0$ e $a_n = \sqrt[n]{a}$, então $a_n \xrightarrow{n} 1$.

Prova. Façamos a prova no caso em que $a \geq 1$, sendo a prova para o caso $0 < a < 1$ totalmente análoga. Se $a \geq 1$, então $a_n \geq a_{n+1} \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, sendo monótona e limitada, a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é convergente pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, digamos para $l \geq 1$ (aqui estamos usando o item (a) da proposição 3.6). Agora, a continuidade da função $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \geq 0$ garante, mediante o emprego da proposição anterior, que

$$a_n \xrightarrow{n} l \Rightarrow \sqrt{a_n} \xrightarrow{n} \sqrt{l} \Rightarrow a_{2n} \xrightarrow{n} \sqrt{l},$$

onde utilizamos, na última implicação acima, que $a_{2n} = \sqrt{a_n}$. Mas, como toda subsequência de uma sequência convergente converge para o mesmo limite, temos também que $a_{2n} \xrightarrow{n} l$, e a unicidade do limite de sequências fornece $l = \sqrt{l}$, de sorte que $l = 1$. ■

Exemplo 4.26 (Suécia). Ache todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) + f(x^2) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Seja f uma função qualquer satisfazendo as condições do enunciado. Fazendo respectivamente $x = 0$ e $x = 1$, obtemos $f(0) = f(1) = 0$. Por outro lado, uma fácil indução garante que, para $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|f\left(\sqrt[2^n]{x}\right)\right| = |f(x)|.$$

Fixe um real positivo x e seja $a_n = \sqrt[2^n]{x}$ para $n \in \mathbb{N}$. Como a função $|f|$ também é contínua e $a_n = \sqrt[2^n]{x} \xrightarrow{n} 1$ pelo exemplo anterior, segue da proposição 4.24 que

$$|f(a_n)| \xrightarrow{n} |f(1)| = 0.$$

Por outro lado, $|f(a_n)| = |f(x)|$ para todo n garante que $|f(a_n)| \xrightarrow{n} |f(x)|$, de maneira que $|f(x)| = 0$, pela unicidade do limite de sequências.

Finalmente, dado $x > 0$, temos

$$0 = f(-x) + f((-x)^2) = f(-x) + f(x^2) = f(x),$$

uma vez que $x^2 > 0 \Rightarrow f(x^2) = 0$. Logo, a única função satisfazendo as condições dadas é a função identicamente nula. ■

A proposição acima permite provar facilmente as afirmações feitas no parágrafo sucedâneo à definição 4.2. Antes, contudo, vale observarmos o seguinte: se $g : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $x_0 \in I$ e $g(x_0) \neq 0$, o lema 4.13 garante a existência de $\delta > 0$ tal que a função g não se anula no intervalo $J = I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Portanto, ao considerarmos a função $\frac{1}{g}$, tal que $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$, sempre suporemos que seu domínio é o intervalo J. Isto posto, vamos ao resultado prometido.

Proposição 4.27. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $x_0 \in I$, então:

(a) As funções $f \pm g$, $f \cdot g$ também são contínuas em x_0.

(b) Se $g(x_0) \neq 0$ e $J \subset I$ é um intervalo tal que $g \neq 0$ em J, então a função $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ também é contínua em x_0.

Prova. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em I, tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$. A continuidade das funções f e g em x_0 garante, de acordo com a proposição anterior, que

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} g(a_n) = g(x_0).$$

(a) Segue da proposição 3.9 que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(f \pm g)(a_n) &= \lim_{n\to+\infty}(f(a_n) \pm g(a_n)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \pm \lim_{n\to+\infty} g(a_n) \\ &= f(x_0) \pm g(x_0) = (f \pm g)(x_0).\end{aligned}$$

Portanto, novamente pela proposição anterior, as funções $f \pm g$ são contínuas em x_0. O argumento para a função $f \cdot g$ é análogo e será deixado ao leitor.

(b) Como $a_n \to x_0 \in J$, descartando um número finito de termos, se necessário, podemos supor que $a_n \in J$, para todo $n \geq 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{f}{g}(a_n) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{\lim_{n\to+\infty} f(a_n)}{\lim_{n\to+\infty} g(a_n)} \\ &= \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f}{g}(x_0)\end{aligned}$$

e, utilizando uma vez mais a proposição anterior, concluímos a prova da continuidade da função $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ em x_0. ■

A seguir, definimos uma noção *mais forte* de continuidade para funções, a qual mostramos em seguida ser equivalente à noção usual para funções definidas em intervalos $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definição 4.28. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **uniformemente contínua** se a seguinte condição for satisfeita: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{4.7}$$

Em palavras, a diferença entre a definição de função uniformemente contínua e a definição de função contínua é que, dado $\epsilon > 0$, para uma função uniformemente contínua o $\delta > 0$, cuja existência é garantida pela definição acima, serve *para todos* $x, y \in I$; por outro lado, na definição 4.2 (de função contínua), tal δ depende, em princípio, do $x_0 \in I$ fixado.

É imediato, a partir da definição acima, que toda função uniformemente contínua é contínua. Por outro lado, o teorema a seguir fornece uma importante classe de exemplos de funções uniformemente contínuas.

Teorema 4.29. Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Prova. Por contradição, suponha que f é contínua mas que (4.7) não seja válida. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, podemos encontrar $x, y \in [a, b]$ satisfazendo

$$|x - y| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Em particular, escolhendo $\delta = \frac{1}{n}$, concluímos pela existência de elementos $x_n, y_n \in [a, b]$ tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon. \tag{4.8}$$

Como $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em $[a, b]$, o teorema de Weierstrass 3.14 garante a existência de uma subsequência $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$, convergindo para algum $x_0 \in [a, b]$. Segue da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} |y_{n_k} - x_0| &\leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| \\ &< \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \xrightarrow{k} 0. \end{aligned}$$

Portanto, a proposição 4.24 assegura que

$$\lim_{k\to+\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0.$$

Por outro lado, (4.8) garante que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$, desigualdade esta em flagrante contradição com o último limite acima. ■

Vale ressaltar que nem toda função contínua é uniformemente contínua; por exemplo, o leitor pode provar sem dificuldade que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua mas não é uniformemente contínua. Por outro lado, o teorema acima admite a seguinte consequência importante.

Corolário 4.30. Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada.

Prova. Como f é uniformemente contínua, para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in [a, b], \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1. \tag{4.9}$$

Escolha agora números reais $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ tais que $x_i - x_{i-1} < \delta$ para $1 \leq i \leq k$, e seja

$$M = \max\{|f(x_1)|, \ldots, |f(x_k)|\}. \tag{4.10}$$

Para $x \in [a, b]$, existe $1 \leq i \leq k$ tal que $x \in [x_{i-1}, x_i]$, de modo que segue em particular que $|x - x_i| < \delta$. Então, segue de (4.9) e (4.10) que

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j)| < 1 + |f(x_j)| \leq 1 + M,$$

de sorte que a função f é limitada. ■

A última propriedade de funções contínuas que estudaremos nessa seção é também devida a Weierstrass, e afirma que toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ assume valores extremos no intervalo $[a, b]$.

Teorema 4.31 (Weierstrass)**.** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, existem $x_m, x_M \in [a, b]$ tais que

$$f(x_m) = \min\{f(x);\ x \in [a, b]\} \quad \text{e} \quad f(x_M) = \max\{f(x);\ x \in [a, b]\}.$$

Prova. Provaremos a existência de x_m, sendo a prova da existência de x_M totalmente análoga. Como f é limitada, existe

$$m = \inf\{f(x);\ x \in [a, b]\}.$$

Por outro lado, a definição de ínfimo garante a existência de uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ em $[a, b]$ tal que $f(x_n) \to m$. Mas, como toda sequência limitada possui uma subsequência convergente, podemos tomar uma subsequência $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ que converge para um real $x_0 \in [a, b]$. Então, da continuidade de f, obtemos

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

Por outro lado, como a sequência $(f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ é uma subsequência da sequência $(f(x_n))_{n\geq 1}$ (que, por sua vez, converge para m), concluímos, a partir da proposição 3.6, que $(f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ também converge para m. Logo, a unicidade do limite de sequências e o que fizemos acima garantem que $f(x_0) = m$. ■

Por fim, o corolário a seguir estende o item (a) do teorema 4.21 para funções contínuas mas não necessariamente monótonas.

Corolário 4.32. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existem reais $c \leq d$ tais que $\text{Im}(f) = [c,d]$.

Prova. Pelo teorema de Weierstrass, existem $x_m, x_M \in [a,b]$ tais que f atinge seus valores mínimo e máximo, respectivamente, em x_m e em x_M. Sendo $f(x_m) = c$ e $f(x_M) = d$, temos, em particular, que $\text{Im}(f) \subset [c,d]$.

Por outro lado, fixado $y \in [c,d]$, o TVI garante a existência de um real x pertencente ao intervalo de extremos x_m e x_M e tal que $f(x) = y$; em particular, $\text{Im}(f) \supset [c,d]$. ■

Problemas – Seção 4.3

1. Dados números reais $a < b$, dê exemplo de uma função contínua e ilimitada $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

2. Encontre todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tenhamos $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

3. O propósito deste problema é apresentar uma outra demonstração do teorema 4.31. Para tanto, recorde que, dada uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, temos f limitada pelo corolário 4.30, de sorte que existem

$$m = \inf\{f(x);\ x \in [a,b]\} \text{ e } M = \sup\{f(x);\ x \in [a,b]\}.$$

Faça, agora, os seguintes itens:

(a) Se $m \notin \text{Im}(f)$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é a função dada por $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$, para todo $x \in [a,b]$, mostre que existe $c > 0$ tal que $g(x) \leq c$, para todo $x \in [a,b]$.

(b) Ainda sob as hipóteses do item (a), conclua que $f(x) \geq m + \frac{1}{c}$, para todo $x \in [a,b]$, e chegue a uma contradição.

(c) Argumente de maneira análoga aos itens (a) e (b) para mostrar que $M \in \text{Im}(f)$.

4. (Romênia.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função sobrejetiva, satisfazendo a seguinte propriedade: para toda sequência divergente $(a_n)_{n\geq 1}$, a sequência $(f(a_n))_{n\geq 1}$ também é divergente. Prove que f é bijetiva e que f^{-1} é contínua.

5. * Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial dada para $x \in \mathbb{R}$ por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Se n é par e $a_n > 0$, prove que:

(a) Existe $A > 0$ tal que $f(x) > a_0$ para $|x| > A$.

(b) Existe $x_0 \in [-A, A]$ tal que $f(x_0) = \min\{f(x);\ x \in \mathbb{R}\}$.

6. (Leningrado.) As funções contínuas $f, g : [0,1] \to [0,1]$ são tais que $f \circ g = g \circ f$. Se f for não decrescente, prove que existe $0 \leq a \leq 1$ tal que $f(a) = g(a) = 1$.

7. * O propósito deste problema é provar o **teorema do ponto fixo de Banach**[4] na reta. Para tanto, sejam $0 < c < 1$ real e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}. \qquad (4.11)$$

Faça os seguintes itens:

(a) Escolha $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrariamente e defina a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ pondo $x_k = f(x_{k-1})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Prove que $|x_{k+1} - x_k| \leq c|x_k - x_{k-1}|$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Conclua, a partir do exemplo 3.17, que $(x_n)_{n\geq 1}$ é convergente.

(c) Se $\alpha = \lim_{n\to+\infty} x_n$, use a continuidade de f (a qual é garantida por (4.11)) para mostrar que α é seu único ponto fixo.

8. Dê exemplo de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sem pontos fixos e tal que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

[4] Após Stefan Banach, matemático polonês do século XX.

CAPÍTULO 5

A Concavidade de uma Função

O problema do cálculo da área *sob o gráfico* de uma função contínua e não negativa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, bem como o problema de decidir quando o gráfico de uma função contínua é *emborcado para cima* ou *para baixo*, são discutidos com cuidado neste capítulo. Como subproduto de tal discussão, introduzimos o conceito de integral de uma função contínua e estudamos as propriedades de duas das mais ubíquas funções da Matemática, as funções logaritmo natural e exponencial; obtemos, ainda, a partir de um estudo detalhado dos caracteres côncavo ou convexo de uma função contínua, a poderosa desigualdade de Jensen, a qual generaliza várias das desigualdades estudadas no capítulo 7 do volume 1.

5.1 A integral de uma função contínua

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa, definimos a *região sob o gráfico* de f como a porção R_f do plano Cartesiano (cf. figura 5.1) dada por

$$R_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b \text{ e } 0 \le y \le f(x)\}.$$

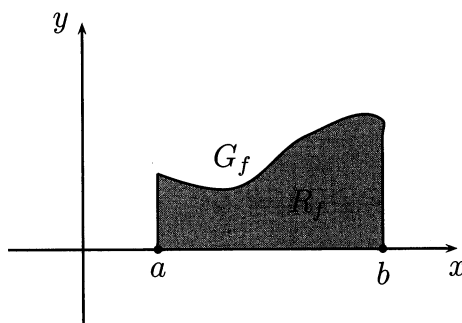



Figura 5.1: a região sob o gráfico de f.

A fim de tentar definir um conceito adequado de área para a região R_f, tomemos $k \in \mathbb{N}$ e a partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ do intervalo $[a, b]$, tal que $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k}$ para $1 \le i \le k$; em seguida, definamos a **área inferior** e a **área superior** de R_f com respeito à partição P, respectivamente, por

$$\underline{A}(f; k) = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ e } \overline{A}(f; k) = \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

onde

$$m_i = \min\{f(x);\ x_{i-1} \le x \le x_i\} \text{ e } M_i = \max\{f(x);\ x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

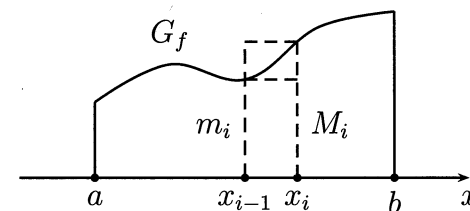



Figura 5.2: áreas inferior e superior.

(os quais existem, pelo teorema 4.31).

Em outras palavras (cf. figura 5.2), $\underline{A}(f; k)$ (resp. $\overline{A}(f; k)$) é a área da região poligonal do plano contida em (resp. contendo) R_f, obtida pela união dos retângulos do semiplano superior com lados erigidos sobre os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ e alturas respectivamente iguais a m_i (resp. M_i).

Isto posto, dizemos que R_f tem área *mensurável* se

$$\sup\{\underline{A}(f; k)\};\ k \in \mathbb{N}\} = \inf\{\overline{A}(f; k);\ k \in \mathbb{N}\} \quad (5.1)$$

e, sendo esse o caso, definimos a **área** $A(f)$ de R_f como o valor comum acima.

Vejamos um exemplo geral relevante.

Proposição 5.1. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, não negativa e monótona, então a área de R_f está bem definida.*

Prova. Suponha f não decrescente, sendo o caso f não crescente totalmente análogo. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ a partição de $[a, b]$ tal que $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k}$, para $1 \le i \le k$. Então,

$$m_i = \min\{f(x);\ x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(x_{i-1})$$

e, analogamente, $M_i = f(x_i)$, de sorte que

$$\begin{aligned}\overline{A}(f;k) - \underline{A}(f;k) &= \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k}((f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \left(\frac{b-a}{k}\right)\sum_{i=1}^{k}((f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \left(\frac{b-a}{k}\right)(f(b) - f(a)),\end{aligned}$$

onde aplicamos a fórmula (4.8) do volume 1 para somas telescópicas na última igualdade acima. Mas, uma vez que

$$\left(\frac{b-a}{k}\right)(f(b) - f(a)) \longrightarrow 0$$

quando $k \to +\infty$, concluímos a prova da igualdade (5.1), nesse caso. ■

Utilizemos a proposição anterior para apresentar um exemplo importante, o qual encontrará uso posteriormente.

Exemplo 5.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, a função $f : [0,b] \to \mathbb{R}$, definida para $x \in [0,b]$ por $f(x) = x^n$, é contínua, não negativa e crescente, de sorte que a proposição acima garante a boa definição da área da região sob seu gráfico. Sendo $k \in \mathbb{N}$ e $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ a partição de $[a,b]$ tal que $x_i - x_{i-1} = \frac{b}{k}$ para $1 \leq i \leq k$, temos $x_i = \frac{bi}{k}$ para $0 \leq i \leq k$ e, daí,

$$\overline{A}(f;k) = \frac{b}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} f(x_i) = \frac{b}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{bi}{k}\right)^n = \left(\frac{b}{k}\right)^{n+1}\sum_{i=1}^{k} i^n.$$

Analogamente,

$$\underline{A}(f;k) = \left(\frac{b}{k}\right)^{n+1}\sum_{i=1}^{k}(i-1)^n.$$

A proposição 5.1 garante a existência de um único real positivo $A(f)$ tal que

$$\left(\frac{b}{k}\right)^{n+1}\sum_{i=1}^{k}(i-1)^n \leq A(f) \leq \left(\frac{b}{k}\right)^{n+1}\sum_{i=1}^{k} i^n.$$

Por outro lado, o problema 4.21 do volume 1 garante que

$$\left(\frac{b}{k}\right)^{n+1}\sum_{i=1}^{k}(i-1)^n < \frac{b^{n+1}}{n+1} < \left(\frac{b}{k}\right)^{n+1}\sum_{i=1}^{k} i^n,$$

de sorte que

$$A(f) = \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

Mais geralmente, para uma função contínua arbitrária $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (i.e., não necessariamente não negativa), ainda podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ e a partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ do intervalo $[a,b]$, tal que $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k}$ para $1 \leq i \leq k$. Nesse caso, definamos a **soma inferior** e a **soma superior** de f com respeito à partição P respectivamente por

$$\underline{S}(f;k) = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{e} \quad \overline{S}(f;k) = \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

com m_i e M_i definidos como anteriormente (observe, contudo, que $\underline{S}(f;k)$ e $\overline{S}(f;k)$ não têm mais as interpretações geométricas anteriores).

Nas notações acima, dizemos que f é **integrável** sobre o intervalo $[a,b]$ se

$$\sup\{\underline{S}(f;k)\};\ k \in \mathbb{N}\} = \inf\{\overline{S}(f;k);\ k \in \mathbb{N}\} \qquad (5.2)$$

e, sendo esse o caso, definimos a **integral** de f sobre o intervalo $[a, b]$ como o valor comum acima. A esse respeito, temos o seguinte resultado, cuja prova pode ser omitida numa primeira leitura.

Teorema 5.3. Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

Prova. Nas notações da discussão acima, basta mostrarmos que existe um único número real I tal que

$$\underline{S}(f; k) \leq I \leq \overline{S}(f; k), \ \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Mostremos inicialmente que, se $k, l \in \mathbb{N}$ e $k \mid l$, então

$$[\underline{S}(f; l), \overline{S}(f; l)] \subset [\underline{S}(f; k), \overline{S}(f; k)]. \tag{5.3}$$

Para tanto, observe que se $k \mid l$, então $P_k \subset P_l$, de sorte que a partição P_l induz uma partição em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ determinado por dois elementos consecutivos de P_k. Sendo

$$x_{i-1} = y_{i0} < y_{i1} < \cdots < y_{it_i} = x_i$$

tal partição induzida por P_l, temos claramente que

$$\min_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \min_{[y_{i,j-1}, y_{ij}]} f \ \text{ e } \ \max_{[y_{i,j-1}, y_{ij}]} f \leq \max_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

para todo $1 \leq j \leq t_i$, de maneira que

$$\begin{aligned}
\left(\min_{[x_{i-1}, x_i]} f\right)(x_i - x_{i-1}) &= \left(\min_{[x_{i-1}, x_i]} f\right)\sum_{j=1}^{t_i}(y_{ij} - y_{i,j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{t_i}\left(\min_{[x_{i-1}, x_i]} f\right)(y_{ij} - y_{i,j-1}) \qquad (5.4) \\
&\leq \sum_{j=1}^{t_i}\left(\min_{[y_{i,j-1}, y_{ij}]} f\right)(y_{ij} - y_{i,j-1})
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\left(\max_{[x_{i-1}, x_i]} f\right)(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{j=1}^{t_i}\left(\max_{[y_{i,j-1}, y_{ij}]} f\right)(y_{ij} - y_{i,j-1}). \tag{5.5}$$

Somando ambos os membros de (5.4) e ambos os membros de (5.5) para $1 \leq i \leq k$, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f; k) &= \sum_{i=1}^{k}\left(\min_{[x_{i-1}, x_i]} f\right)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t_i}\left(\min_{[y_{i,j-1}, y_{ij}]} f\right)(y_{ij} - y_{i,j-1}) \\
&= \underline{S}(f; l)
\end{aligned}$$

e, analogamente, $\overline{S}(f; k) \geq \overline{S}(f; l)$, conforme desejado.

Agora, dados $k, l \in \mathbb{N}$ arbitrários (i.e., não necessariamente tais que $k \mid l$), segue de (5.3) e do fato de $k, l \mid kl$ que

$$\underline{S}(f; k) \leq \underline{S}(f; kl) \leq \overline{S}(f; kl) \leq \overline{S}(f; l).$$

Portanto, fixando arbitrariamente $l \in \mathbb{N}$, as desigualdades acima garantem que

$$\sup\{\underline{S}(f; k);\ k \in \mathbb{N}\} \leq \overline{S}(f; l).$$

Mas, a arbitrariedade do l escolhido garante, agora, que

$$\sup\{\underline{S}(f; k);\ k \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{\overline{S}(f; l);\ l \in \mathbb{N}\}.$$

Para concluir a demonstração, é suficiente mostrarmos que a desigualdade acima é, de fato, uma igualdade. Para este fim, basta que, para cada $\epsilon > 0$ dado, encontremos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\overline{S}(f; k) - S(f; k) < \epsilon.$$

A fim de garantirmos a existência de um tal k, invocamos o teorema 4.29, segundo o qual f é uniformemente contínua. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Mas, se $k \in \mathbb{N}$ for tal que $\frac{b-a}{k} < \delta$ e para tal k tomarmos P_k como acima, então, para $x_{i-1} \leq x < y << x_i$, temos

$$|x-y| \leq x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k} < \delta,$$

de modo que segue que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Em particular, se m_i e M_i denotam, respectivamente, os valores mínimo e máximo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, temos que

$$M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b-a},\ \forall\, 1 \leq i \leq k.$$

Logo, para tal escolha de k, temos

$$\begin{aligned}\overline{S}(f;k) - \underline{S}(f;k) &= \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})\\ &< \sum_{i=1}^{k}\frac{\epsilon}{b-a}\cdot(x_i - x_{i-1})\\ &= \frac{\epsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \epsilon.\end{aligned}$$

■

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, denotamos a integral I de f sobre o intervalo $[a,b]$ escrevendo

$$\int_a^b f(x)dx. \quad (5.6)$$

Vale observar que a notação acima, devida a Leibniz, tem sua razão de ser: o símbolo $\int$ lembra um S *estilizado*, e está presente para recordar que o cálculo do valor da integral envolve um processo de aproximação por somas; os números a e b recordam o domínio da função f que está sendo integrada; dx recorda que o valor da integral é calculado como o limite de sequências de somas, cada uma das quais envolvendo certas diferenças $x_i - x_{i-1}$ de elementos de P_k, diferenças essas que eram classicamente denotadas por Δx_i. Por fim, observe que tanto faz denotarmos a integral de f sobre o intervalo $[a,b]$ como em (5.6) ou escrevendo

$$\int_a^b f(t)dt.$$

De fato, uma tal mudança de notação equivale a mudarmos o nome da variável, o que certamente não afeta o valor da integral.

Outra observação interessante (e óbvia) é que, para uma função f como acima e não negativa, a integral (5.6) ainda retém a interpretação de área da região R_f. Para f geral, sob certas condições (5.6) representa a diferença entre as áreas das regiões sob e acima do gráfico de f, no sentido do problema 3.

É possível mostrar que, para uma função contínua arbitrária $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (5.7)$$

para todo $a < c < b$. De fato, se estendermos o conceito de integral pondo

$$\int_c^c f(x)dx = 0 \ \text{ e } \ \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx,$$

então é imediato verificar que a igualdade

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

se verifica para todos $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$.

Prosseguindo com o desenvolvimento da teoria, o teorema 5.3 garante a consistência da definição a seguir. No enunciado da mesma, permitimos que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Definição 5.4. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Fixado $x_0 \in (a, b)$, a **integral indefinida** de f baseada em x_0 é a função $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

De modo análogo, definimos o que vem a ser a integral indefinida baseada em x_0 de uma função contínua f com domínio de uma das formas $[a, b]$, $[a, b)$ (possivelmente $b = +\infty$) ou $(a, b]$ (possivelmente $a = -\infty$).

Ainda em relação à definição acima (e também às suas extensões), vale observar a seguinte consequência de (5.7): para $\alpha, \beta \in (a, b)$, temos (cf. problema 2)

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt. \tag{5.8}$$

Exemplo 5.5. Se $n \in \mathbb{N}$ e $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é a função dada para $x \geq 0$ por $f(x) = x^n$, é imediato verificar que a integral indefinida de f baseada em 0 é a função $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ para $x \geq 0$.

Uma consequência importante da discussão acima é que a integral indefinida baseada em qualquer ponto é sempre contínua. Façamos a prova dessa afirmação para funções contínuas e monótonas $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, postergando a análise do caso geral para a seção 6.4.

Lema 5.6. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é uma funçao contínua, não negativa e monótona. Fixado $x_0 \in (a, b)$, a integral indefinida de f baseada em x_0 é uma função contínua e crescente.

Prova. Suponha f crescente (o outro caso é análogo), e seja $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ a integral indefinida em questão. Dados $x, y \in (a, b)$ tais que $x < y$, seja $c = \frac{x+y}{2} > x$. Segue de (5.8) que

$$F(y) - F(x) = A(f_{|[x,y]}) \geq A(f_{|[c,y]}) \geq f(c)(y - c) > 0,$$

e F é crescente.

A continuidade de F se estabelece com um cálculo análogo: para $x, y \in [a, b]$ tais que $x < y \leq c$, segue, do que fizemos acima e novamente de (5.8), que

$$|F(y) - F(x)| = F(y) - F(x) = A(f_{|[x,y]}) \leq f(y)(y - x) \leq f(c)(y - x).$$

Portanto, pelo lema 4.6, f é contínua. ■

Problemas – Seção 5.1

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a restrição de uma função afim ao intervalo $[a, b]$. Se f é não negativa, a região R_f é um triângulo ou um trapézio. Mostre que, em um qualquer de tais casos, o valor obtido para a área de R_f ao seguirmos o procedimento geral descrito no início desta seção coincide com o valor obtido mediante o emprego das fórmulas usuais da geometria Euclidiana plana.

2. * Use a igualdade (5.7) e a definição de integral indefinida para deduzir a relação (5.8).

3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com um número finito de zeros no intervalo $[a, b]$, digamos $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$. Se

$$R_f^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

e

$$R_f^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b \text{ e } f(x) \leq y \leq 0\},$$

use (5.7) para provar que

$$\int_a^b f(x)dx = A(R_f^+) - A(R_f^-).$$

Para o próximo problema, dadas funções contínuas $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, tais que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, seja

$$R_{fg} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b \text{ e } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

a região do plano situada *entre os gráficos* de f e g. Definimos a área de R_{fg} por

$$A(R_{fg}) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

4. Prove o **princípio de Cavalieri**: para $i = 1, 2$, sejam $f_i, g_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas, tais que $g_i(x) \leq f_i(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Se, para todo $x \in [a,b]$, o segmento que une os pontos $(x, f_1(x))$ e $(x, g_1(x))$ tem comprimento igual ao segmento que une os pontos $(x, f_2(x))$ e $(x, g_2(x))$, então $A(R_{f_1g_1}) = A(R_{f_2g_2})$.

5. * Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e $\lambda \in \mathbb{R}$. Prove que:
   (a) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
   (b) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

Para o próximo problema, observe que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a regra da cadeia para continuidade garante que $|f| = |\cdot| \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ também o é. Em particular, $|f|$ é integrável, pelo teorema 5.3.

6. * Dada uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, prove a **desigualdade triangular para integrais**:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

7. Prove a **desigualdade de Cauchy para integrais**: se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(x)^2dx\right)^{1/2},$$

com igualdade se, e só se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lambda g(x)$, para todo $x \in [a,b]$.

8. (Leningrado.) Se $f, g : [0,1] \to [0,1]$ são funções contínuas, com f não decrescente, prove que

$$\int_0^1 (f \circ g)(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx.$$

5.2 A função logaritmo natural

Conforme antecipado na introdução a este capítulo, a discussão da seção anterior permite definir rigorosamente uma das mais importantes funções da Matemática, e o fazemos agora.

Definição 5.7. A **função logaritmo natural**, $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, é a função definida por

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

Sendo $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função de proporcionalidade inversa, i.e., tal que $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$, em termos de área da região

sob o gráfico de f (cf. figura 5.3), temos

$$\log x = \begin{cases} A(f_{|[1,x]}), & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \\ -A(f_{|[x,1]}), & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Para a comodidade do leitor, mantemos a notação da integral como área na discussão a seguir.

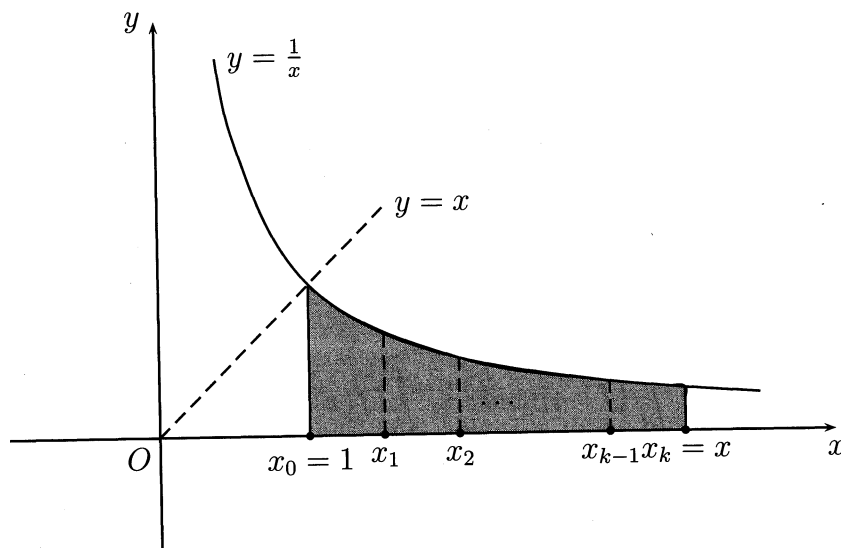



Figura 5.3: definição de $\log x$ para $x > 1$.

A proposição a seguir lista algumas propriedades úteis da função logaritmo natural.

Proposição 5.8. A função logaritmo natural é contínua, crescente e tem imagem $\mathbb{R}$. Ademais, para todos $x, y > 0$, temos

$$\log(xy) = \log x + \log y. \tag{5.9}$$

Prova. Segue do lema 5.6 o fato de a função log ser contínua e crescente. Para explicitar sua imagem, seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função de proporcionalidade inversa. Para $m \in \mathbb{N}$, repetidos usos de (5.7), juntamente com o exemplo 3.20, fornecem

$$\log 2^m = A(f_{|[1,2^m]}) = \sum_{j=1}^{2^m} A(f_{|[j-1,j]}) > \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{j} > 1 + \frac{m}{2}.$$

Analogamente,

$$\log 2^{-m} < -1 - \frac{m}{2},$$

de sorte que a continuidade de f garante, por intermédio do TVI, que

$$\text{Im}\,(\log) \supset \left[-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right], \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\text{Im}\,(\log) = \mathbb{R}$.

Resta provar (5.9), o que faremos para $x, y > 1$, sendo os demais casos totalmente análogos. Para tanto, afirmamos inicialmente que

$$A(f_{|[x,xy]}) = A(f_{|[1,y]}).$$

De fato, fixada a partição $P = \{1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = y\}$ de $[1, y]$, tal que $x_i - x_{i-1} = \frac{y-1}{k}$ para $1 \leq i \leq k$, a partição correspondente Q de $[x, xy]$ é $Q = \{x = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = xy\}$, com $y_i = ax_i$ para $1 \leq i \leq k$. Então, uma vez que f é decrescente, temos

$$\begin{aligned} \underline{A}(f_{|[x,xy]}; k) &= \sum_{i=1}^{k} f(y_i)(y_i - y_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{ax_i} \cdot (ax_i - ax_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \underline{A}(f_{|[1,y]}; k), \end{aligned}$$

e segue daí que

$$\begin{aligned} A(f_{|[x,xy]}) &= \sup\{\underline{A}(f_{|[x,xy]}; k);\ k \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\underline{A}(f_{|[1,y]}; k);\ k \in \mathbb{N}\} = A(f_{|[1,y]}). \end{aligned}$$

Por fim, segue daí e de (5.7) que

$$\begin{aligned}\log(xy) &= A(f_{|[1,xy]}) = A(f_{|[1,x]}) + A(f_{|[x,xy]})\\ &= \log x + A(f_{|[1,y]})\\ &= \log x + \log y.\end{aligned}$$

■

O corolário a seguir traz mais algumas propriedades úteis da função logaritmo natural.

Corolário 5.9. Para todo $x > 0$, temos $\log x^{-1} = -\log x$ e $\log x^r = r\log x$, para $r \in \mathbb{Q}$.

Prova. Primeiramente, segue de (5.9) que

$$0 = \log 1 = \log(x \cdot x^{-1}) = \log x + \log x^{-1}$$

e, daí, temos a primeira igualdade. Para a segunda igualdade, observe inicialmente que (5.9) e uma fácil indução fornecem

$$\log x^n = n \log x,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. A partir daí, concluímos que

$$\log x = \log(x^{1/n})^n = n \log x^{1/n},$$

ou, o que é o mesmo,

$$\log x^{1/n} = \frac{1}{n}\log x.$$

De posse dos casos particulares acima e sendo $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$\log x^r = \log x^{m/n} = \log(x^{1/n})^m = m \log x^{1/n} = m \cdot \frac{1}{n}\log x = r \log x.$$

Por fim, se r for um racional negativo, então $s = -r$ é racional e positivo, de modo que

$$\log x^r = \log(x^s)^{-1} = -\log x^s = -(s \cdot \log x) = r \log x.$$

■

Provaremos, na próxima seção, que o gráfico da função logaritmo natural é *emborcado para baixo*. Admitindo este fato por ora e reunindo as informações de que dispomos até o momento, esboçamos seu gráfico na figura 5.4.

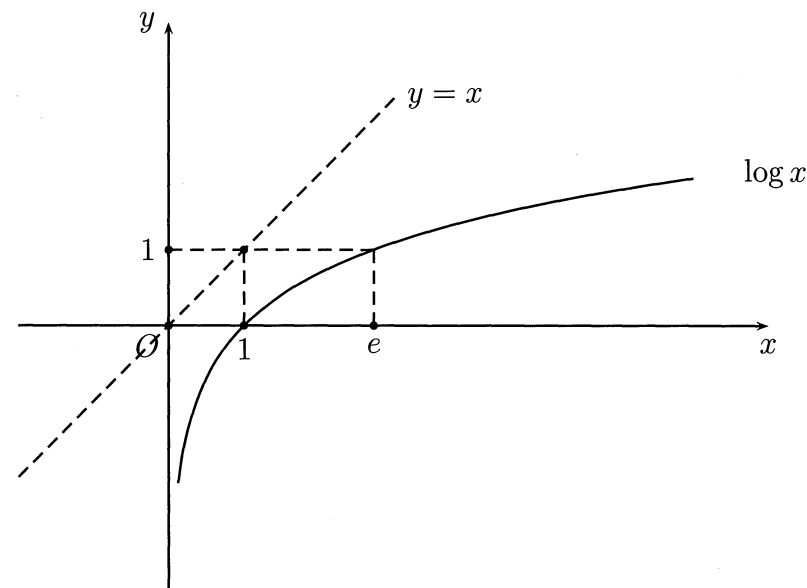



Figura 5.4: gráfico de $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

De posse dos resultados acima, redefinimos o número e como a única solução da equação $\log x = 1$. Em resumo,

$$\log e = 1.$$

O teorema a seguir compatibiliza a definição atual de e com aquela dada no exemplo 3.23.

Teorema 5.10. $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$.

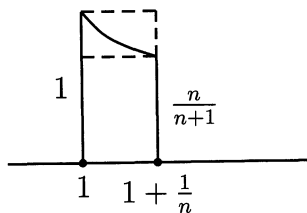



Figura 5.5: estimando $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Prova. Inicialmente, mostremos que, se e é a única solução da equação $\log x = 1$, então $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Para tanto, observe (cf. figura 5.5) que

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right] \cdot 1 = \frac{1}{n}$$

e, analogamente,

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Portanto, segue do corolário anterior que

$$\frac{n}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$$

ou, ainda,

$$\log e^{\frac{n}{n+1}} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \log e.$$

Mas, uma vez que log é crescente, as desigualdades acima garantem que

$$\frac{e}{e^{\frac{1}{n+1}}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Portanto, fazendo $n \to +\infty$ e utilizando o resultado do exemplo 4.25 e do problema 6, página 91, obtemos o resultado.

Para concluir a demonstração, é suficiente mostrarmos que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Para tanto, veja que, pela fórmula do desenvolvimento binomial, temos

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \\
&< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!};
\end{aligned}$$

portanto, segue do problema 1, página 90, que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Por outro lado, fixado $n_0 > 1$ inteiro, temos, para $n > n_0$ também inteiro, que

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \\
&> 1 + \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to +\infty$ e utilizando novamente o resultado do problema 1, página 90, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{n_0}\frac{1}{k!},$$

para todo $n_0 \in \mathbb{N}$. Por fim, fazendo $n_0 \to +\infty$ na última desigualdade, segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},$$

o que, por sua vez, conclui a demonstração. ■

Uma vez que a função logaritmo natural $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é uma bijeção crescente e contínua, podemos considerar sua inversa

$$\exp : \mathbb{R} \to (0,+\infty), \tag{5.10}$$

denominada a **função exponencial**. Assim, para $x, y \in \mathbb{R}$, sendo $x > 0$, temos

$$\log x = y \Leftrightarrow x = \exp(y).$$

Em particular, segue de $\log 1 = 0$ e $\log e = 1$ que $\exp(0) = 1$ e $\exp(1) = e$. Ademais, temos a seguinte

Proposição 5.11. Para $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

(a) $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$.

(b) $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$ e $\exp(x^r) = e^r$ se $r \in \mathbb{Q}$.

Prova.
(a) Sendo $a = \exp(x)$ e $b = \exp(y)$, temos $a, b > 0$ e $\log a = x$, $\log b = y$. Portanto, segue da proposição 5.8 que

$$x + y = \log a + \log b = \log(ab)$$

e, daí, $\exp(x+y) = ab$. Por fim, os cálculos acima fornecem

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = ab = \exp(x+y).$$

(b) Fazendo $y = -x$ em (a) e utilizando o fato de $\exp(0) = 1$, obtemos

$$1 = \exp(x + (-x)) = \exp(x)\cdot\exp(-x),$$

de sorte que $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$. Por outro lado, uma fácil indução a partir de (a) fornece $\exp(x^n) = (\exp(x))^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\exp(x) = \exp((x^{1/n})^n) = (\exp(x^{1/n}))^n,$$

de modo que $\exp(x^{1/n}) = (\exp(x))^{1/n}$. Agora, se $m, n \in \mathbb{N}$ e $r = \frac{m}{n}$, segue que

$$\begin{aligned}\exp(x^r) &= \exp(x^{m/n}) = \exp((x^m)^{1/n}) = (\exp(x^m))^{1/n}\\ &= ((\exp(x))^m)^{1/n} = (\exp(x))^{m/n} = (\exp(x))^r.\end{aligned}$$

Finalmente, se $r \in \mathbb{Q}$ for negativo, digamos $r = -s$, com $s \in \mathbb{Q}$ positivo, segue da primeira parte de (b) que

$$\begin{aligned}\exp(x^r) &= \exp(x^{-s}) = (\exp(x^s))^{-1} = (\exp(x))^s)^{-1}\\ &= (\exp(x))^{-s} = (\exp(x))^r.\end{aligned}$$

■

Denotando, doravante,

$$\exp(x) = e^x,$$

concluímos, a partir do item (b) da proposição acima, que tal notação é consistente com o sentido usual que emprestamos ao número e^x, quando $x \in \mathbb{Q}$.

A função exponencial nos permite definir, rigorosamente, potências a^x, para a real positivo e $x \in \mathbb{R}$. De fato, nas notações do parágrafo anterior, pomos

$$a^x = e^{x \log a}, \tag{5.11}$$

de sorte que

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = a^x \cdot a^y$$

e

$$\log a^x = \log(e^{x \log a}) = x \log a,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se $x \in \mathbb{Q}$, digamos $x = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, segue do corolário 5.9 que

$$a^r = e^{\frac{m}{n} \cdot \log a} = e^{\log \sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{a^m};$$

em outras palavras, neste caso a definição (5.11) concorda com o sentido que temos atribuído a a^x até agora. Em particular, temos $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.

Problemas – Seção 5.2

1. * Para $0 < a \neq 1$, seja $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a **função logaritmo na base a**, definida para $x > 0$ por

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Prove que $\log_a$ é bijetiva e sua inversa é a função $x \mapsto a^x$. Ademais, dados reais positivos a, b, c, x, y, prove também que:

(a) $\log = \log_e$.

(b) $\log_a$ é crescente, se $a > 1$, e decrescente, se $0 < a < 1$.

(c) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

(d) $\log_a c = \log_b c \cdot \log_a b$.

(e) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$.

2. Prove que o número $\log_{10} 2$ é irracional.

3. Calcule o número de soluções reais da equação $\log x = (x-1)^2$.

4. O conjunto dos racionais não é fechado em relação à potenciação; por exemplo, se $a = b = \frac{1}{2}$, então $a^b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, que é um número irracional. Se a e b forem irracionais positivos, é sempre verdade que a^b é irracional? Justifique sua resposta.

5. Prove que a equação $x^2 = 2^x$ tem exatamente três raízes reais, uma das quais é irracional.

6. (Israel.) Encontre todas as soluções reais do sistema de equações

$$\begin{cases} x + \log(x + \sqrt{x^2+1}) = y \\ y + \log(y + \sqrt{y^2+1}) = z \\ z + \log(z + \sqrt{z^2+1}) = x \end{cases}.$$

7. Se $n \in \mathbb{N}$, mostre que a representação decimal de n tem exatamente $\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$ algarismos.

8. (OBM.) Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, com $a_1 \neq 0$. Dado $k \in \mathbb{N}$, prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a representação decimal de n^k começa (à esquerda) com a sequência de algarismos $a_1 a_2 \ldots a_m$.

Mostramos no problema acima que, fixado o expoente de uma potência natural, podemos escolher a base de forma a prescrever os algarismos iniciais do resultado. O próximo problema garante que o contrário também é verdade, i.e., que fixada a base de

uma potência natural, podemos escolher o expoente de forma a prescrever os algarismos iniciais do resultado. Para abordá-lo, o leitor pode achar conveniente recordar o material da seção 3.3 (mais precisamente o corolário 3.35).

9. Sejam $a > 1$ um inteiro que não é potência de 10 e s uma sequência finita de algarismos decimais, o primeiro dos quais é não nulo. Prove que existe uma potência de a cuja representação decimal começa, à esquerda, pela sequência de algarismos s.

10. (Rússia.) Mostre que, para $1 < a < b < c$ reais quaisquer, tem-se

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0.$$

11. (OBM.) Dê exemplo de uma função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e, para todo $x \in \mathbb{R}$, valha $f(2x + 1) = 3f(x) + 5$.

O problema a seguir estabelece uma recíproca do problema 1.2.11 do volume 1.

12. Prove que existem infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que as representações decimais de 2^n e 5^n começam, à esquerda, com o algarismo 3.

13. Encontre todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições a seguir:

    (a) f é crescente.

    (b) $f(1) = 1$ e $f(2) = 4$.

    (c) $f(xy) = f(x)f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{N}$.

14. (Coréia do Sul.) Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ satisfazendo as seguintes condições:

    (a) $2f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$, para todos $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

    (b) Se $m, n \in \mathbb{Z}_+$, com $m \geq n$, então $f(m^2) \geq f(n^2)$.

5.3 Funções côncavas e convexas

Nesta seção, estamos interessados em estudar funções *convexas* e *côncavas*. Para tanto, em tudo o que segue $I \subset \mathbb{R}$ denota um intervalo.

Definição 5.12. Uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ é:

(a) **convexa**, se $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, para todos $x, y \in I$.

(b) **côncava**, se $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, para todos $x, y \in I$.

A proposição a seguir refina as condições de convexidade e concavidade sobre f.

Proposição 5.13. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então:

(a) f é convexa se, e só se,, para todos $x, y \in I$ e todo $t \in [0, 1]$, tivermos

$$f((1-t)x + ty)) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

(b) f é côncava se, e só se,, para todos $x, y \in I$ e todo $t \in [0, 1]$, tivermos

$$f((1-t)x + ty)) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Prova. Façamos a prova do item (a) (a prova de (b) é completamente análoga), observando inicialmente que, se f for contínua e satisfizer a condição do item (a), então basta tomar $t = \frac{1}{2}$ para concluirmos que se trata de uma função convexa.

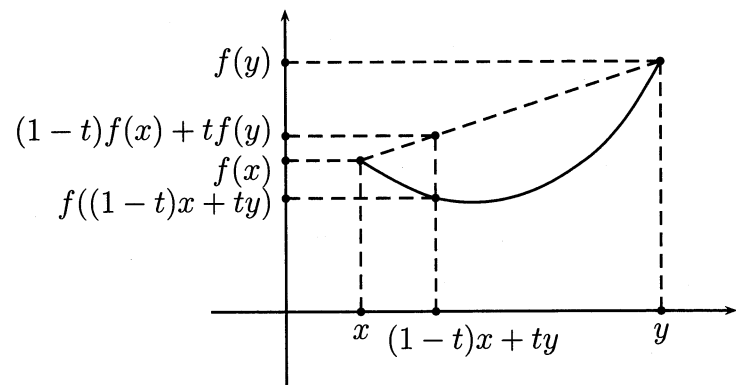



Figura 5.6: gráfico de uma função convexa.

Reciprocamente, suponha que f é convexa. Fixados $x, y \in I$, mostremos primeiramente (cf. figura 5.6) que

$$f((1-t)x+ty)) \leq (1-t)f(x)+tf(y), \tag{5.12}$$

para todo racional diádico $t \in [0,1]$ (cf. problema 1.5.4 do volume 1). Para tanto, façamos indução sobre $k \geq 1$.

Para $k=1$, já temos a validade de (5.12) para $t=0$, $\frac{1}{2}$ e 1. Para $t=\frac{3}{4}$, aplicando a convexidade de f duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+3y}{4}\right) &= f\left(\frac{\frac{x+y}{2}+y}{2}\right) \leq \frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(y)}{2} \\ &\leq \frac{\frac{f(x)+f(y)}{2}+f(y)}{2} = \frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y), \end{aligned}$$

conforme desejado. Por fim, para $t=\frac{1}{4}$ basta trocar x por y no argumento acima.

Suponha agora que (5.12) seja válida para um certo $k \in \mathbb{N}$, todos $x, y \in I$ e todo $0 \leq n \leq 2^k$ inteiro. Se $t=\frac{m}{2^{k+1}}$, com $0 \leq m \leq 2^{k+1}$

inteiro, distingamos dois subcasos:

(i) m é par, digamos $m=2n$: então $t=\frac{n}{2^k}$, e a validade de (5.12) segue da hipótese de indução.

(ii) m é ímpar, digamos $m=2n+1$: então

$$t=\frac{m}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{2^{k+1}}+\frac{m+1}{2^{k+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^k}+\frac{n+1}{2^k}\right).$$

Pondo $s=\frac{n}{2^k}$ e $u=\frac{n+1}{2^k}$, temos $s, u \in [0,1]$ e $t=\frac{1}{2}(s+u)$. Portanto, segue da convexidade de f e da hipótese de indução que

$$\begin{aligned} f((1-t)x+ty) &= f\left(\left(1-\frac{s+u}{2}\right)x+\left(\frac{s+u}{2}\right)y\right) \\ &= f\left(\frac{((1-s)x+sy)+((1-u)x+uy)}{2}\right) \\ &\leq \frac{f((1-s)x+sy)+f((1-u)x+uy)}{2} \\ &\leq \frac{1}{2}[((1-s)f(x)+sf(y))+((1-u)f(x)+uf(y))] \\ &= \left(1-\frac{s+u}{2}\right)f(x)+\left(\frac{s+u}{2}\right)f(y) \\ &= (1-t)f(x)+tf(y). \end{aligned}$$

Agora, sejam $x, y \in I$ e $t_0 \in [0,1]$ um real qualquer. A continuidade de f garante, via regra da cadeia, a continuidade da função $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, tal que

$$g(t)=(1-t)f(x)+tf(y)-f((1-t)x+ty)),$$

para $t \in [0,1]$. Por outro lado, mostramos acima que $g(t) \geq 0$, para todo $t \in [0,1]$ que é um racional diádico, de sorte que a densidade dos mesmos em $[0,1]$ garante, mediante o problema 13, página 140, que $g(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,1]$, conforme desejado. ■

As afirmações a seguir são, agora, bastantes evidentes e fornecem as seguintes interpretações geométricas úteis dos caracteres convexo ou côncavo de uma dada função:

- f é convexa se, e só se,, para todos $a < b$ em I, a porção do gráfico de f situada entre as retas $x = a$ e $x = b$ não estiver acima da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
- f é côncava se, e só se,, para todos $a < b$ em I, a porção do gráfico de f situada entre as retas $x = a$ e $x = b$ não estiver abaixo da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

De outra forma, sendo

$$\mathcal{R}_+(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq f(x)\}$$

e

$$\mathcal{R}_-(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq f(x)\},$$

temos que

- f é convexa se, e só se, $\mathcal{R}_+(f)$ é uma região convexa do plano.
- f é côncava se, e só se, $\mathcal{R}_-(f)$ é uma região convexa do plano.

A próxima definição refina as noções de função côncava e convexa.

Definição 5.14. Uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ é:

(a) **estritamente convexa** se, para todos $x, y \in I$ distintos, tivermos

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

(b) **estritamente côncava** se, para todos $x, y \in I$ distintos, tivermos

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

A definição 5.12 garante que toda função estritamente convexa (resp. côncava) é convexa (resp. côncava). Entretanto, nem toda função convexa (resp. côncava) é estritamente convexa (resp. estritamente côncava), como atesta o seguinte

Exemplo 5.15. Toda função afim é convexa (e também côncava). De fato, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for afim, é imediato verificar que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Em particular, funções afins não são nem estritamente convexas nem estritamente côncavas.

Vejamos agora alguns exemplos na direção positiva.

Exemplo 5.16. A restrição da função de proporcionalidade inversa ao conjunto dos reais positivos é uma função estritamente convexa. De fato, denotando $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x > 0$, segue do item (b) do exemplo 7.4 do volume 1 que, para todos $x, y > 0$, temos

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2}{x+y} \leq \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

com igualdade se, e só se, $x = y$.

Exemplo 5.17. Fixado $n \in \mathbb{N}$, a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada para $x \geq 0$ por $f(x) = x^n$ é estritamente convexa. De fato, supondo por hipótese de indução que

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n+y^n}{2}$$

para todos $x, y > 0$, com igualdade se, e só se, $x = y$, temos

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \left(\frac{x^n+y^n}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x^n+y^n}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\quad&(x^n+y^n)(x+y)\leq 2(x^{n+1}+y^{n+1})\\ \Leftrightarrow\quad&x^ny+xy^n\leq x^{n+1}+y^{n+1}\\ \Leftrightarrow\quad&(x-y)(x^n-y^n)\geq 0,\end{aligned}$$

o que é verdade; ademais, uma rápida inspeção das desigualdades acima garante que há igualdade se, e só se, $x=y$.

Exemplo 5.18. A função $\log:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ é estritamente côncava. De fato, para todos $x,y>0$, temos $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$; mas como log é crescente, segue que

$$\log\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\log\sqrt{xy}=\frac{\log x+\log y}{2},$$

e claramente a igualdade ocorre se, e só se, $x=y$.

Exemplo 5.19. A função seno é estritamente côncava no intervalo $[0,\pi]$. De fato, para $0\leq x,y\leq\pi$, é suficiente mostrarmos que

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y\leq 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

com igualdade se, e só se, $x=y$. Para tanto, transformando o primeiro membro em produto, obtemos

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

A condição $x,y\in[0,\pi]$ garante que $\frac{x+y}{2}\in[0,\pi]$ e, daí, que $\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq 0$; mas, como sempre temos $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\leq 1$, segue que

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\leq 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=1$ ou $\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)=0$. Analisemos essas duas possibilidades separadamente:

- $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=1$: a condição $x,y\in[0,\pi]$ garante que $-\frac{\pi}{2}\leq\frac{x-y}{2}\leq\frac{\pi}{2}$; nesse intervalo, temos $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=1$ se, e só se, $\frac{x-y}{2}=0$, i.e., se, e só se, $x=y$.

- $\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)=0$: segue de $\frac{x+y}{2}\in[0,\pi]$ que $\frac{x+y}{2}=0$ ou π; mas, como $x,y\in[0,\pi]$, isso é o mesmo que pedir que $x=y=0$ ou $x=y=\pi$.

Exemplo 5.20. A função tangente é estritamente convexa no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. De fato, para $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ não ambos nulos, as fórmulas de adição de arcos fornecem

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{2}\quad&\Leftrightarrow\quad\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}\leq\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{2\cos x\cos y}\\ &\Leftrightarrow\quad\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}\leq\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2\cos x\cos y}\\ &\Leftrightarrow\quad\cos x\cos y\leq\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow\quad 2\cos x\cos y\leq 1+\cos(x+y)\\ &\Leftrightarrow\quad\cos x\cos y\leq 1-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\\ &\Leftrightarrow\quad\cos(x-y)\leq 1,\end{aligned}$$

o que é sempre verdade. Por outro lado, os cálculos acima também mostram que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{2}\Leftrightarrow\cos(x-y)=1\Leftrightarrow x=y,$$

de sorte que a função é estritamente convexa no intervalo em questão.

A continuação, provamos uma versão da proposição 5.13 para funções estritamente convexas e estritamente côncavas, a qual encontrará utilidade na próxima seção.

Proposição 5.21. Uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa (resp. estritamente côncava) se, e só se,

$$f((1-t)x+ty)) < (>)(1-t)f(x)+tf(y), \tag{5.13}$$

para todos $x, y \in I$ distintos e todo $t \in (0,1)$.

Prova. Examinemos a convexidade estrita de f (a análise do outro caso sendo totalmente análoga), observando inicialmente que se (5.13) for válida para todos $x, y \in I$ e todo $t \in (0,1)$, então (tomando $t = \frac{1}{2}$) f é estritamente convexa.

Reciprocamente, suponha que f é estritamente convexa e fixe $x, y \in I$ distintos e $0 < t < 1$. Se $z = (1-t)x + ty$, então $x < z < y$, de modo que podemos escolher $a \in (x, z)$ e $b \in (z, y)$ tais que $z = \frac{a+b}{2}$. Ademais, sendo $a = (1-s)x+sy$ e $b = (1-u)x+uy$, com $s, u \in (0,1)$, segue de $z = \frac{a+b}{2}$ que $t = \frac{s+u}{2}$. Portanto, a convexidade estrita de f, juntamente com a proposição 5.13, garante que

$$\begin{aligned}
f((1-t)x+ty) &= f(z) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2} \\
&= \frac{1}{2}[f((1-s)x+sy)+f((1-u)x+uy)] \\
&\leq \frac{1}{2}[((1-s)f(x)+sf(y))+((1-u)f(x)+uf(y))] \\
&= \left(1-\frac{s+u}{2}\right)f(x)+\left(\frac{s+u}{2}\right)f(y) \\
&= (1-t)f(x)+tf(y).
\end{aligned}$$

■

Problemas – Seção 5.3

1. Sejam $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos e $f : I \to J$ uma bijeção contínua. Se f é convexa (resp. estritamente convexa), prove que $f^{-1} : J \to I$ é côncava (resp. estritamente côncava), e vice-versa.

2. * Prove que a soma de um número finito de funções estritamente convexas (resp. estritamente côncavas) e de mesmo domínio também é uma função estritamente convexa (resp. estritamente côncava).

3. Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dada para $x \neq 0$ por $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

4. * Prove que a função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ para $x \in (0,1)$, é estritamente convexa.

5. Sejam $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos e $g : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$ funções estritamente convexas (resp. estritamente côncavas). Se f for crescente, prove que $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ também é estritamente convexa (resp. estritamente côncava).

6. * Prove que a função $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$, dada para $x \in (0,\pi)$ por $f(x) = \log \operatorname{sen} x$, é estritamente côncava.

7. Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, não negativa e crescente (resp. decrescente). Prove que toda integral indefinida de f (cf. definição 5.4) é estritamente convexa (resp. estritamente côncava).

8. Use o resultado do problema anterior para provar que:

   (a) a função logaritmo natural é estritamente côncava.

   (b) para $n > 1$ inteiro, a função $x \mapsto x^n$, $x \geq 0$, é estritamente convexa.

9. Se $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, crescente (resp. não decrescente) e convexa (resp. estritamente convexa), prove que a função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada para $x > 0$ por $g(x) = xf(x)$, também é estritamente convexa.

5.4 A desigualdade de Jensen

Para nós, a importância da discussão sobre funções côncavas e convexas levada a cabo na seção anterior reside no seguinte teorema, conhecido como a **desigualdade de Jensen**[1].

Teorema 5.22 (Jensen). Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $x_1, \ldots, x_n \in I$ e $t_1, \ldots, t_n \in (0, 1)$, com $t_1 + \cdots + t_n = 1$, então $t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in I$. Ademais:

(a) Se f for convexa, então

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n),$$

ocorrendo a igualdade no caso em que f é estritamente convexa se, e só se, $x_1 = \cdots = x_n$.

(b) Se f for côncava, então

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n),$$

ocorrendo a igualdade no caso em que f é estritamente côncava se, e só se, $x_1 = \cdots = x_n$.

Prova. Suponhamos f estritamente convexa (os demais casos são totalmente análogos) e façamos a prova por indução sobre $n > 1$. O caso $n = 2$ segue da hipótese de convexidade estrita e da proposição 5.21.

[1]Após o matemático e engenheiro dinamarquês dos séculos XIX e XX Johan Jensen.

Suponha agora que, para um certo $n > 1$ e todos $x_1, \ldots, x_n \in I$ e $t_1, \ldots, t_n \in (0, 1)$, com $t_1 + \cdots + t_n = 1$, tenhamos $t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in I$ e

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n),$$

com igualdade se, e só se, $x_1 = \cdots = x_n$. Consideremos elementos $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in I$ e $t_1, \ldots, t_n, t_{n+1} \in (0, 1)$ tais que $t_1 + \cdots + t_n + t_{n+1} = 1$. Defina

$$y = \frac{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n}{1 - t_{n+1}} = s_1x_1 + \cdots + s_nx_n,$$

com $s_j = \frac{t_j}{1-t_{n+1}}$, para $1 \leq j \leq n$. Como $s_1 + \cdots + s_n = 1$ e $s_j \in (0, 1)$ para $1 \leq j \leq n$, segue da hipótese de indução que $y \in I$. Daí,

$$t_1x_1 + \cdots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1} = (1 - t_{n+1})y + t_{n+1}x_{n+1} \in I$$

e a convexidade estrita de f

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + \cdots + t_{n+1}x_{n+1}) &= f((1 - t_{n+1})y + t_{n+1}x_{n+1}) \\ &\leq (1 - t_{n+1})f(y) + t_{n+1}f(x_{n+1}), \end{aligned}$$

com igualdade se, e só se, $y = x_{n+1}$. Aplicando agora a outra metade da hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} f(y) &= f(s_1x_1 + \cdots + s_nx_n) \\ &\leq s_1f(x_1) + \cdots + s_nf(x_n) \\ &= \frac{1}{1 - t_{n+1}}(t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n)), \end{aligned}$$

com igualdade se, e só se, $x_1 = \cdots = x_n$.

Juntando as duas desigualdades acima, concluímos que

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + \cdots + t_{n+1}x_{n+1}) &\leq (1 - t_{n+1})f(y) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &\leq (t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n)) + t_{n+1}f(x_{n+1}), \end{aligned}$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $y = x_{n+1}$ e $x_1 = \cdots = x_n$. Mas é imediato verificar que tais condições equivalem a $x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1}$, conforme desejado. ■

Os exemplos a seguir elencam algumas aplicações da desigualdade de Jensen.

Exemplo 5.23 (BMO). Seja $n > 1$ e $a_1, \ldots, a_n$ reais positivos com soma igual a 1. Para cada $1 \leq i \leq n$, defina $b_i = a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n$. Prove que

$$\frac{a_1}{1+b_1} + \frac{a_2}{1+b_2} + \cdots + \frac{a_n}{1+b_n} \geq \frac{n}{2n-1},$$

com igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$.

Prova. Substituindo $b_i = 1 - a_i$ para $1 \leq i \leq n$, basta provar que

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Para tanto, afirmamos inicialmente que a função $f : (-\infty, 2) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{2-x}$ é estritamente convexa. De fato, como

$$f(x) = -1 + \frac{2}{2-x},$$

a convexidade estrita de f é uma consequência imediata da convexidade estrita da função de proporcionalidade inversa e do problema 12, página 69.

Portanto, aplicando a desigualdade de Jensen, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq nf\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{2n-1},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ e, portanto, se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$. ■

Nosso próximo exemplo utiliza a desigualdade de Jensen para resolver um interessante problema de geometria.

Exemplo 5.24. Sejam dados, no plano, um semicírculo Γ de raio R e um diâmetro A_0A_1 de Γ. Para cada inteiro $n > 2$, mostre que existe um único $n-$ágono $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ satisfazendo as seguintes condições:

(a) $A_2, \ldots, A_{n-1} \in \Gamma$.

(b) A área de $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ é a maior possível.

Solução. Considere a figura 5.7 como representativa da situação do problema, e seja $A_i\widehat{O}A_{i+1} = \alpha_i$, para $1 \leq i \leq n-1$ (com $A_n = A_0$). Então $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = \pi$ e a fórmula do seno para a área de um triângulo fornece

$$\begin{aligned} A(A_0A_1 \ldots A_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n-1} A(A_iOA_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}R^2 \text{sen}\, A_i\widehat{O}A_{i+1} \\ &= \frac{1}{2}R^2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{sen}\, \alpha_i. \end{aligned}$$

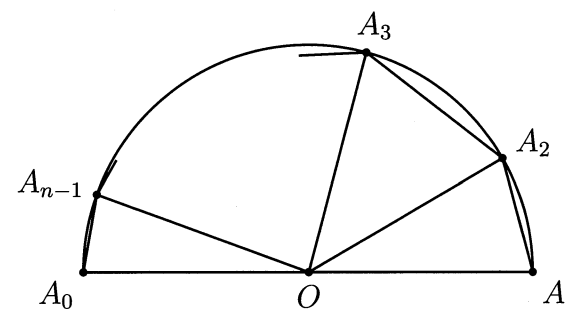



Figura 5.7: polígono de área máxima inscrito em um semicírculo.

Agora, uma vez que a função seno é estritamente côncava no intervalo $[0, \pi]$, segue da desigualdade de Jensen que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \text{sen}\, \alpha_i \leq (n-1)\text{sen}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\right) = (n-1)\text{sen}\, \frac{\pi}{n-1},$$

com igualdade se, e só se, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{n-1}$. Logo, há um único polígono de área máxima satisfazendo as condições do enunciado. ■

O exemplo a seguir utiliza a desigualdade de Jensen para dar outra prova da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Exemplo 5.25. Demonstre a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, para $n > 2$ reais positivos, como corolário da desigualdade de Jensen.

Prova. Dados $n > 2$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a sobrejetividade da função logaritmo natural garante a existência de números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que $a_j = \log x_j$ para $1 \leq j \leq n$.

De acordo com o exemplo 5.18, a função $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é estritamente côncava. Portanto, temos pela desigualdade de Jensen que

$$\frac{\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n}{n} \leq \log\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

ou, ainda,

$$\log \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \log\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right), \tag{5.14}$$

com igualdade se, e só se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Por fim, como log é uma função crescente, a desigualdade entre as médias segue prontamente de (5.14).

■

Podemos obter outras desigualdades interessantes refinando o uso da desigualdade de Jensen em conexão com a função logaritmo natural. Em particular, a desigualdade (5.15) a seguir é conhecida como a **desigualdade de Young**[2].

[2]Após William H. Young, matemático inglês dos séculos XIX e XX.

Lema 5.26 (Young)**.** Sejam p e q reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dados $a, b > 0$, temos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{5.15}$$

com igualdade se, e só se, $a^p = b^q$.

Prova. Já sabemos que a função logaritmo natural é estritamente côncava em $(0, +\infty)$. Portanto, dados reais positivos x_1 e x_2, e $t_1, t_2 > 0$ tais que $t_1 + t_2 = 1$, temos pela desigualdade de Jensen que

$$\log(t_1 x_1 + t_2 x_2) \geq t_1 \log x_1 + t_2 \log x_2,$$

com igualdade se, e só se, $x_1 = x_2$. Fazendo $t_1 = \frac{1}{p}$, $t_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = a^p$ e $x_2 = b^q$, obtemos

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log ab,$$

com igualdade se, e só se, $a^p = b^q$. Por fim, como a função logaritmo natural é crescente, segue da desigualdade acima que

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

com igualdade se, e só se, $a^p = b^q$. ■

A desigualdade da proposição a seguir é uma consequência da desigualdade de Young, sendo conhecida na literatura como a **desigualdade de Hölder**[3]. Observe que, quando $p = q = 2$, tal desigualdade se reduz à desigualdade de Cauchy (7.13) do volume 1.

Proposição 5.27 (Hölder)**.** Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais positivos dados, e $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q},$$

[3]Após Otto Hölder, matemático alemão dos séculos XIX e XX.

com igualdade se, e só se,

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \cdots = \frac{a_n^p}{b_n^q}.$$

Prova. Fazendo $A = (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}$ e $B = (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{1/q}$, temos

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq AB \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B} \leq 1.$$

Agora, sendo $x_i = \frac{a_i}{A}$ e $y_i = \frac{b_i}{B}$, temos

$$\sum_{i=1}^n x_i^p = \frac{1}{A^p}\sum_{i=1}^n a_i^p = 1, \quad \sum_{i=1}^n y_i^q = \frac{1}{B^q}\sum_{i=1}^n b_i^q = 1$$

e queremos provar que $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$. Mas pela desigualdade de Young, segue que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n y_i^q = 1.$$

Para haver igualdade, devemos ter $x_i^p = y_i^q$ para $1 \leq i \leq n$ ou, ainda,

$$\frac{a_i^p}{A^p} = \frac{b_i^q}{B^q},$$

para $1 \leq i \leq n$. De outro modo, devemos ter

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \cdots = \frac{a_n^p}{b_n^q} = \frac{A^p}{B^q}.$$

Reciprocamente, é imediato verificar que, se a condição acima for satisfeita, teremos igualdade. ∎

Problemas – Seção 5.4

1. (Romênia.) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa e crescente. Prove que a sequência $(f(n))_{n\geq 1}$ não contém uma PA infinita.

2. Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, prove que

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2,$$

com igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

3. Dados $k > 1$ inteiro e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos, prove que

$$\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^k,$$

com igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

4. Sejam Γ um círculo de centro O e raio R, $n > 2$ um inteiro fixado e $A_1A_2\ldots A_n$ um $n-$ágono convexo inscrito em Γ.

   (a) Se O não pertence ao interior de $A_1A_2\ldots A_n$, use um argumento geométrico para mostrar que há polígonos inscritos em Γ e com área maior que a área de $A_1A_2\ldots A_n$.

   (b) Use a desigualdade de Jensen para mostrar que, dentre todos os polígonos de n lados inscritos em Γ, os regulares são os únicos de área máxima.

5. Sejam dados um círculo Γ de centro O e raio r e $n > 2$ inteiro. Dentre todos os $n-$ágonos convexos $A_1A_2\ldots A_n$ circunscritos a Γ, prove que os regulares são os de perímetro mínimo.

6. Seja ABC um triângulo acutângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Se R é o raio do círculo circunscrito a ABC, prove que
$$a + b + c \leq 3R\sqrt{3},$$
com igualdade se, e só se, ABC for equilátero.

7. Sejam $n > 1$ inteiro e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos com soma igual a 1. Prove que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 - x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}},$$
com igualdade em uma qualquer das desigualdades acima se, e só se, $x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$.

8. (Romênia.) Seja ABC um triângulo equilátero de altura h, P um ponto em seu interior e x, y e z as distâncias de P aos lados de ABC. Prove que
$$\frac{h-x}{h+x} + \frac{h-y}{h+y} + \frac{h-z}{h+z} \geq \frac{3}{2},$$
com igualdade se, e só se, P for o centro do polígono.

9. (IMO.) Se ABC é um triângulo com todos os ângulos menores que 150° e P é um ponto em seu interior, mostre que ao menos um dos ângulos $\angle PAB$, $\angle PBC$ e $\angle PCA$ é menor ou igual a 30°.

10. Prove a seguinte generalização da desigualdade entre as médias, conhecida como a **desigualdade ponderada entre as médias**: dados reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e naturais $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tais que $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} = 1$, temos
$$\frac{a_1^{k_1}}{k_1} + \frac{a_2^{k_2}}{k_2} + \cdots + \frac{a_n^{k_n}}{k_n} \geq a_1 a_2 \cdots a_n,$$
com igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

11. Prove a **desigualdade de Minkowski**[4]: para $k > 1$ inteiro e $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais positivos, temos
$$\sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^k} \leq \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n} a_i^k} + \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n} b_i^k},$$
com igualdade se, e só se,
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

[4]Após Hermann Minkowski, matemático alemão dos séculos XIX e XX.

CAPÍTULO 6

Limites e Derivadas

Vimos, na seção 5.1, como resolver o problema do cálculo da área da região sob o gráfico de uma função contínua e não negativa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, problema este que motivou a introdução do conceito de integral de uma função contínua. Um dos propósitos deste capítulo é analisar outro problema geometricamente relevante relativo a gráficos, qual seja, o da definição do conceito de reta tangente a um gráfico em um ponto do mesmo. Surpreendentemente, mostraremos que a solução de tal problema, quando existir, resultará intimamente relacionada ao conceito de integral, sendo a ponte entre ambos o famoso *teorema fundamental do Cálculo*, objeto da seção 6.4. Ao longo do caminho, mostraremos também como utilizar derivadas para resolver, pelo menos em tese, os problemas da obtenção dos intervalos de monotonicidade e concavidade de uma função (duas vezes) derivável, e do esboço razoavelmente acurado dos gráficos de tais funções.

6.1 Limites de funções

Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $x_0 \in (a,b)$. Se $A(x_0, f(x_0))$, $x_1 \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ e $B_1(x_1, f(x_1))$, dizemos que a reta $\overleftrightarrow{AB_1}$ é uma **secante** ao gráfico de G_f de f (cf. figura 6.1, onde, para $i = 1, 2$, tomamos $x_i \in (a,b) \setminus \{x_0\}$, fizemos $B_i(x_i, f(x_i))$ e traçamos as secantes $\overleftrightarrow{AB_i}$ ao gráfico de f).

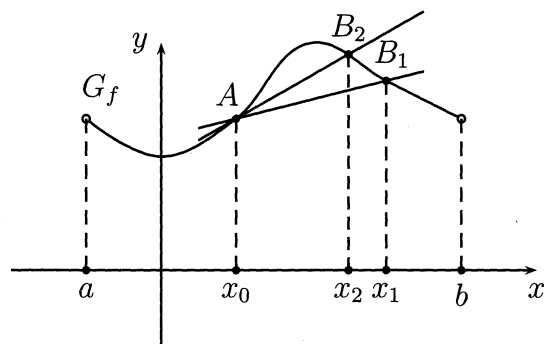



Figura 6.1: secantes $\overleftrightarrow{AB_1}$ e $\overleftrightarrow{AB_2}$ ao gráfico de f.

Admitindo que exista uma noção razoável de reta tangente a G_f em A, um pouco de intuição geométrica torna razoável supor que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ deva aproximar-se cada vez mais de uma tal tangente à medida que B se aproxime de A ao longo de G_f, ou, o que é o mesmo, à medida que x se aproxime de x_0 em (a,b).

Observe que, se $x_1 \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ e $B(x_1, f(x_1))$, a equação da secante $\overleftrightarrow{AB}$ ao gráfico de f tem a forma

$$y - f(x_0) = \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0); \tag{6.1}$$

por outro lado, a pretensa reta tangente a G_f em A, se não for vertical,

tem equação da forma

$$y - f(x_0) = m(x - x_0), \tag{6.2}$$

para algum $m \in \mathbb{R}$. Portanto, comparando (6.1) e (6.2) e tendo em conta a discussão do parágrafo anterior, somos levados a concluir que os quocientes $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ aproximam m cada vez melhor à medida que x_1 aproxime x_0 cada vez melhor. De outra forma, concluímos que a única definição razoável para a reta tangente ao gráfico de f no ponto A é a reta de equação (6.2), onde

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{6.3}$$

Aqui, a expressão do segundo membro acima representa intuitivamente o *valor limite* dos quocientes $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ à medida que x_1 *tende* a x_0, caso tal "*limite*" exista em algum sentido a ser precisado.

Uma vez que a discussão acima ainda se encontra num patamar relativamente vago, adiamos seu prosseguimento para a próxima seção, a fim de colocar a noção de limite em bases mais sólidas. Para tanto, começamos com a seguinte

Definição 6.1. Fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, uma **vizinhança** de x_0 é um intervalo I da forma $I = (x_0 - r, x_0 + r)$, onde r é um real positivo. Nesse caso, diremos que r é o **raio** de I e que I é a **r−vizinhança** de x_0.

Se I é a r−vizinhança de x_0, então todo $x \in I$ é dito uma **r−aproximação** de x_0 ou, ainda, uma aproximação de x_0 com **erro** menor que r.

Definição 6.2. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in X$ e $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que f tem **limite** L quando x **tende** a x_0, e denotamos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \tag{6.4}$$

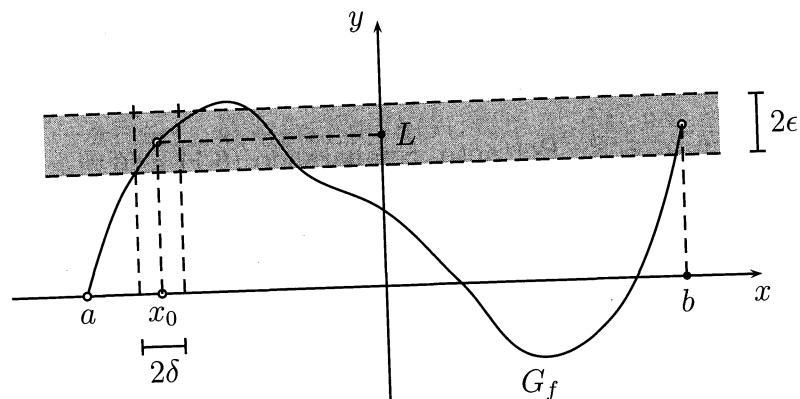



Figura 6.2: limite de uma função.

se, para cada vizinhança J de L, existir uma vizinhança I de x_0 tal que

$$x \in X \cap (I \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J. \tag{6.5}$$

Denotando respectivamente por δ e ϵ os raios de I e J, uma maneira equivalente de formular (6.5) é dizer que, para cada $\epsilon > 0$ dado (o que é o mesmo que dar a vizinhança J), deve existir $\delta > 0$ (o que é o mesmo que existir a vizinhança I) tal que

$$x \in X, \text{ e } \underbrace{0 < |x - x_0| < \delta}_{x \in I \setminus \{x_0\}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - L| < \epsilon}_{f(x) \in J}. \tag{6.6}$$

Veja a figura 6.2.

Em palavras, (6.6) ocorre quando, fixado um erro $\epsilon > 0$ para (o valor de) L, existir um erro $\delta > 0$ para x_0 tal que $\delta-$aproximações $x \neq x_0$ de x_0 em X correspondam a $\epsilon-$aproximações $f(x)$ de L. Ainda de outro modo, (6.6) ocorre quando pudermos tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto desejado, bastando para isso tomarmos $x \neq X \setminus \{x_0\}$ suficientemente próximo de x_0.

A esta altura, vale frisar que justificar a validade de um certo limite mediante o emprego da definição acima é um *jogo de gato e rato*: arbitrado um erro $\epsilon > 0$ para o candidato L a limite, temos de ser capazes de encontrar um erro $\delta > 0$ para x_0 (o qual, em geral, dependerá tanto do ϵ dado quanto do próprio x_0) de modo que a validade da condição $0 < |x - x_0| < \delta$ para um elemento $x \in X$ acarrete a validade da condição $|f(x) - L| < \epsilon$.

Vejamos, em alguns exemplos, como implementar a estratégia acima. Em tudo o que segue, por vezes omitiremos quaisquer referências explícitas ao domínio e/ou contradomínio das funções envolvidas, concentrando-nos em suas expressões em termos da variável independente (x, em geral). Sempre que tal ocorrer, convencionamos que o domínio da função é seu domínio maximal de definição (cf. seção 1.1), e o contradomínio é o conjunto dos números reais.

Exemplos 6.3.

(a) $\lim_{x \to 2}(-2x+7) = 3$: seja dado $\epsilon > 0$. Partindo de $x \in \mathbb{R}$ sujeito a um erro do tipo $0 < |x - 2| < \delta$, temos

$$|(-2x + 7) - 3| = | - 2x + 4| = 2|x - 2| < 2\delta.$$

Escolhendo então $\delta > 0$ tal que $2\delta \leq \epsilon$, temos que

$$x \in \mathbb{R}, \text{ e } 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(-2x + 7) - 3| < 2\delta \leq \epsilon,$$

conforme desejado.

(b) $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$: seja dado $\epsilon > 0$. Partindo de $x \in \mathbb{R}$ sujeito a um erro do tipo $0 < |x - 3| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} |x^2 - 9| &= |x - 3||x + 3| < \delta|x - 3 + 6| \\ &\leq \delta(|x - 3| + 6) < \delta(\delta + 6), \end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade triangular na penúltima passagem acima. Portanto, caso seja possível escolhermos $\delta > 0$ de tal forma que $\delta(\delta + 6) \leq \epsilon$, teremos

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x^2 - 9| < \delta(\delta + 6) \leq \epsilon,$$

conforme desejado. Resta mostrar que a escolha de $\delta > 0$ é possível, para o quê basta resolver a inequação $\delta(\delta + 6) \leq \epsilon$. Ao fazê-lo, obtemos

$$0 < \delta \leq \sqrt{\epsilon + 9} - 3.$$

Em retrospectiva, se tivermos uma função $f : X \to \mathbb{R}$ e quisermos provar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, o segredo para descobrir quais $\delta > 0$ funcionam para um ϵ dado é argumentar da seguinte forma: partindo de $x \in X$ sujeito a um erro do tipo $0 < |x - x_0| < \delta$, estimamos o erro $|f(x) - L|$ em termos de δ *por excesso*, obtendo, digamos, uma desigualdade do tipo $|f(x) - L| < E(\delta)$, onde E representa uma certa função de δ. Em seguida, impomos que tal erro $E(\delta)$ não ultrapasse o erro ϵ desejado, descobrindo então os valores apropriados de δ (usualmente, esse segundo passo se resume a resolver, para $\delta > 0$, a inequação $E(\delta) \leq \epsilon$). Por fim, se $\delta > 0$ satisfizer $E(\delta) \leq \epsilon$, teremos claramente que

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < E(\delta) \leq \epsilon,$$

conforme desejado.

Agora que já discutimos o conceito de limite com certo cuidado, utilizamo-lo para caracterizar as funções contínuas, conforme ensina a seguinte

Proposição 6.4. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ uma união de intervalos e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função dada. Para $x_0 \in X$, temos f contínua em x_0 se, e só se,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Prova. Suponha, inicialmente, que f seja contínua em x_0. Então, a definição 4.2 garante que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para o qual

$$x \in X \text{ e } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Em particular, se $x \in X$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, ainda teremos $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, de sorte que (6.6) é satisfeita. Logo, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Reciprocamente, suponha que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Então, de acordo com a definição, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Mas, uma vez que a condição $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ é trivialmente satisfeita quando $x = x_0$, certamente podemos escrever a implicação acima como

$$x \in X \text{ e } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Portanto, a definição 4.2 garante que f é contínua em x_0. ■

Exemplo 6.5. Se $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1}$, utilizemos a proposição anterior para calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$. Para tanto, observemos inicialmente que 1 é raiz do numerador e do denominador da expressão que define $f(x)$, com $x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$ e $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Por outro lado, em $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ temos

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x^2 - 2x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1};$$

mas, uma vez que a função $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1}$ é contínua, a proposição anterior garante que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = -\frac{3}{2}.$$

Um fato importante sobre limites de funções é que se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, com $L \neq 0$, então existe uma vizinhança I de x_0 tal que f tem o mesmo sinal de L em $X \cap (I \setminus \{x_0\})$. Este é, grosso modo, o conteúdo do lema a seguir, o qual se constitui no análogo do lema 4.13, sendo também conhecido como o **lema de permanência do sinal**.

Lema 6.6. Sejam $x_0 \in X$ e $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ uma função dada. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, com $L \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} L/2 < f(x) < 3L/2, & \text{se } L > 0 \\ -3L/2 < f(x) < -L/2, & \text{se } L < 0 \end{cases}.$$

Prova. Suponha $L > 0$ (o outro caso é análogo). Pela definição de limite, dado $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{L}{2}.$$

Portanto, para cada um de tais x temos $-\frac{L}{2} \leq f(x) - L < \frac{L}{2}$, ou, o que é o mesmo, $\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$. ■

De posse do lema acima, colecionamos na proposição a seguir algumas *regras operatórias* que simplificam o cálculo efetivo de limites. Para o item (c) da mesma, cumpre observarmos o seguinte: dados $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $g : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, com $M \neq 0$, o lema 6.6 garante a existência de $\delta_0 > 0$ tal que a função g não se anula no conjunto $Y = (X \setminus \{x_0\}) \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Portanto, ao considerarmos a função $\frac{1}{g}$, tal que $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$, sempre suporemos implicitamente que seu domínio é o conjunto Y.

Proposição 6.7. Sejam $x_0 \in X$ e $f, g : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ duas funções dadas. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, então:

(a) $\lim_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = L \pm M$.

(b) $\lim_{x\to x_0}(f \cdot g) = L \cdot M$.

(c) $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$, caso $M \neq 0$.

Prova. Em todos os itens a seguir, suponhamos dado $\epsilon > 0$.

(a) Façamos a prova para $f + g$, sendo a prova para $f - g$ completamente análoga. Como indicado anteriormente, tentaremos estimar $|(f+g)(x) - (L+M)|$ por excesso em termos de $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$: como

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (L+M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

(pela desigualdade triangular), a fim de que $|(f+g)(x) - (L+M)| < \epsilon$ para $x \in X$ próximo a (mas diferente de) x_0, é suficiente que tenhamos $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$. Mas, como $\frac{\epsilon}{2} > 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, a definição de limite garante a existência de reais positivos δ_1 e δ_2 tais que

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $\delta > 0$ e a concomitância das condições $x \in X$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ acarreta simultaneamente em $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ e, daí, em

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

conforme desejado.

(b) Novamente aqui, estimemos $|(fg)(x) - LM|$ por excesso em termos de $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$: inicialmente, segue da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - LM| &= |f(x)(g(x) - M) + (f(x) - L)M| \\ &\leq |f(x)||g(x) - M| + |f(x) - L||M| \\ &\leq (|f(x) - L| + |L|)|g(x) - M| + |f(x) - L||M| \\ &= |f(x) - L||g(x) - M| + |L||g(x) - M| \\ &\quad + |M||f(x) - L|. \end{aligned}$$

Portanto, a fim de que $|(fg)(x) - (LM)| < \epsilon$ para $x \in X$ próximo a (mas diferente de) x_0, é suficiente que tenhamos cada uma das parcelas $|f(x)-L||g(x)-M|$, $|L||g(x)-M|$ e $|M||f(x)-L|$ menor que $\frac{\epsilon}{3}$. Para tanto, basta que tenhamos, por exemplo,

$$|f(x) - L|, |g(x) - M| < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}},$$

$$|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{3(|L|+1)} \quad \text{e} \quad |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{3(|M|+1)}.$$

Em suma, é suficiente que tenhamos

$$|f(x) - L| < \min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|M|+1)}\right\}$$

e

$$|g(x) - M| < \min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|L|+1)}\right\}.$$

Mas, se $\epsilon_1 = \min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|M|+1)}\right\}$ e $\epsilon_2 = \min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|L|+1)}\right\}$, então $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, e a definição de limite garante a existência de erros $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $|f(x) - L| < \epsilon_1$, para todo $x \in X$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$, e $|g(x) - M| < \epsilon_2$, para todo $x \in X$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Portanto, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então $\delta > 0$ e a concomitância das condições $x \in X$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ acarreta, simultaneamente, em $|f(x) - L| < \epsilon_1$ e $|g(x) - M| < \epsilon_2$, como necessário.

(c) Conforme antecipado no parágrafo anterior à prova, o lema de permanência do sinal garante a existência de $\delta_0 > 0$ tal que $|g(x)| > \frac{|M|}{2}$ para $x \in X$ e $0 < |x - x_0| < \delta_0$. Portanto, consideramos $\frac{f}{g}$ como a função $\frac{f}{g} : Y \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, onde $Y = (X \setminus \{x_0\}) \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$, de sorte que em princípio faz sentido analisarmos o problema da existência ou não do limite $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Como $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, pelo item (b) basta mostrarmos que $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$. Para tanto, como nos itens anteriores, estimemos $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right|$ por

excesso em termos de $|g(x) - M|$: como $|g(x)| > \frac{|M|}{2}$ para $x \in Y$, temos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|g(x) - M|}{|g(x)||M|} \leq \frac{2}{M^2}|g(x) - M|$$

e, a fim de que $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon$, basta termos $|g(x) - M| < \frac{M^2\epsilon}{2}$.

Portanto, adicionalmente ao $\delta_0 > 0$ acima, basta escolhermos (invocando a definição de limite) um real $\delta_1 > 0$ para o qual $|g(x) - M| < \frac{M^2\epsilon}{2}$, para todo $x \in X$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$; sendo $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$, temos para $x \in Y$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ que $|g(x)| < \frac{|M|}{2}$ e $|g(x) - M| < \frac{M^2\epsilon}{2}$, conforme necessário. ■

Uma fácil indução permite estender as fórmulas dos itens (a) e (b) da proposição acima a uma quantidade finita de funções. Especificamente, se $x_0 \in X$ e $f_1, \ldots, f_n : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ forem tais que $\lim_{x\to x_0} f_j(x) = L_j$ para $1 \leq j \leq n$, então

$$\lim_{x\to x_0} (f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_n)(x) = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n$$

e

$$\lim_{x\to x_0} (f_1 f_2 \cdots f_n)(x) = L_1 L_2 \cdots L_n.$$

Em particular, se $k \in \mathbb{N}$ e $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ for tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, então

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^k = L^k.$$

Também, se $g : X \to \mathbb{R}$ for contínua em x_0, a proposição 6.4 e do item (b) da proposição acima fornecem

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = Lg(x_0).$$

Doravante, assumiremos as observações acima sem maiores comentários.

A proposição a seguir é conhecida na literatura como o **teorema do confronto**. Conforme veremos logo em seguida à sua prova, ela é muito útil para o cálculo de limites.

Proposição 6.8. Sejam $x_0 \in X$ e $f, g, h : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(x)$ pertence ao intervalo de extremidades $f(x)$ e $h(x)$, para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$, então $\lim_{x \to x_0} g(x)$ também existe e é igual a L.

Prova. Dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que as condições $x \in X$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ impliquem $|g(x) - L| < \epsilon$. Para tanto, se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, então $f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L$ e, a partir daí, é fácil concluir que

$$|g(x) - L| \leq \max\{|f(x) - L|, |h(x) - L|\}. \tag{6.7}$$

Se $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$, concluímos, de modo análogo, a validade de (6.7).

Agora, invocando a definição de limite, sabemos que existem números reais $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \epsilon.$$

Portanto, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $\delta > 0$ e

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - L| < \epsilon \\ |h(x) - L| < \epsilon \end{cases}.$$

Assim, para $x \in X$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, temos

$$|g(x) - L| \leq \max\{|f(x) - L|, |h(x) - L|\} \leq \max\{\epsilon, \epsilon\} = \epsilon.$$

■

O teorema do confronto torna possível calcularmos um limite conhecido na literatura como o **limite trigonométrico fundamental**, o qual se revelará de grande importância na próxima seção.

Lema 6.9. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Prova. Como queremos calcular um limite, podemos nos restringir ao intervalo $|x| < \frac{\pi}{2}$. Suponha primeiro $x > 0$. Sendo $\ell(\widehat{AB}) = x$ o comprimento do arco $\widehat{AB}$ (figura 6.3), temos

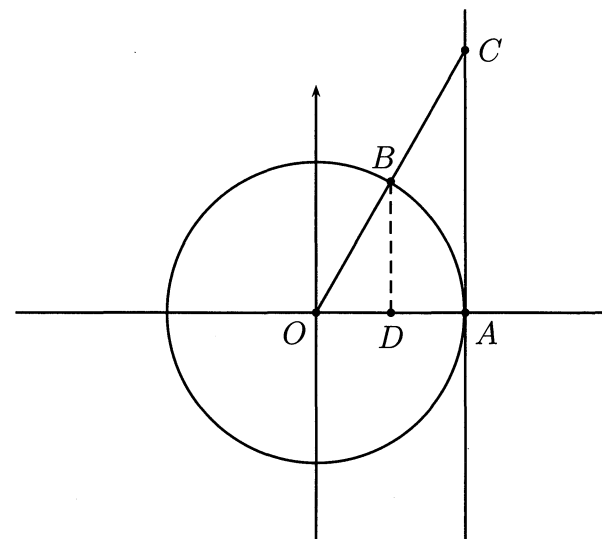



Figura 6.3: o limite trigonométrico fundamental.

$$\operatorname{sen} x = \overline{BD} < \overline{AB} < \ell(\widehat{AB}) = x$$

ou, ainda, $\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$. Por outro lado, sabemos do volume 2 que a área do setor circular AOB é igual a $\pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$, ao passo que a área do triângulo AOC é igual a $\frac{1}{2}\overline{AC}$; portanto, também temos

$$x = \ell(\widehat{AB}) < \overline{AC} = \operatorname{tg} x,$$

de maneira que $\cos x < \frac{\sin x}{x}$. Combinando essas duas desigualdades, obtemos

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \tag{6.8}$$

O caso $x < 0$ pode ser tratado analogamente e fornece a mesma desigualdade acima. Então, segue de (6.8), juntamente com o teorema do confronto e a continuidade da função cosseno, que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ existe e

$$1 = \lim_{x\to 0} \cos x \leq \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

■

Outra ferramenta muito útil no que concerne o cálculo de limites é dada pela próxima proposição. Para o enunciado da mesma, recorde que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *limitada* se existir $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \ \forall\, x \in X.$$

Proposição 6.10. Sejam $x_0 \in X$ e $f, g : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funções tais que f é limitada em X e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Então, $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$, mesmo que não exista $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Prova. Dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x)| < \epsilon.$$

Para tanto, se $M > 0$ é tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$, então $|f(x)g(x)| \leq M|g(x)|$ para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$, e basta encontrarmos $\delta > 0$ tal que $|g(x)| < \frac{\epsilon}{M}$ para todo $x \in X$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$. Para tanto, é suficiente observarmos que a definição de limite aplicada a $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ garante a existência de $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x)| < \frac{\epsilon}{M},$$

conforme desejado.

■

Exemplo 6.11. Se $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é a função tal que $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$, então $|f(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $\lim_{x\to 0} x = 0$, segue da proposição acima que $\lim_{x\to 0} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

De modo análogo à discussão até aqui, dada uma função $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, podemos definir noções de **limites laterais** para f em x_0, respectivamente **à esquerda** e **à direita**, pondo:

(i) $\lim_{x\to x_0-} f(x) = L$ quando, para cada $\epsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que
$$-\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{6.9}$$

(ii) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = L$ quando, para cada $\epsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que
$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{6.10}$$

Referimos ao leitor a figura 6.4 para uma interpretação geométrica da noção de limite lateral à direita, deixando como exercício a interpretação correspondente para limites laterais à esquerda.

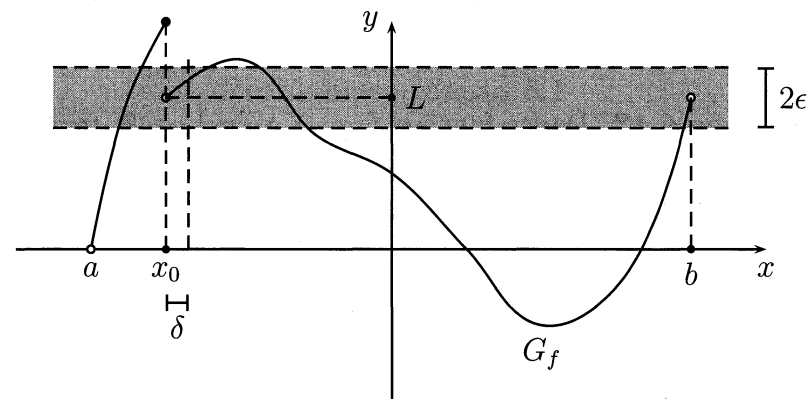



Figura 6.4: limite lateral à direita.

Ainda em relação a limites laterais, é imediato formular e provar, para os mesmos, resultados análogos àqueles da proposição 6.7 (cf. problema 3). Por fim, para uma função $f : (a, x_0) \to \mathbb{R}$ tal que exista $\lim_{x\to x_0-} f(x) = L$, escreveremos, por vezes, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$,

deixando ao contexto a tarefa de elucidar se se trata de um limite ordinário ou lateral; uma observação análoga é válida para uma função $f : (x_0, b) \to \mathbb{R}$ tal que exista $\lim_{x\to x_0+} f(x)$.

Terminamos esta seção observando que também podemos definir noções de *limites infinitos* e *limites no infinito*, começando com o caso de **limites infinitos**.

Definição 6.12. Dada uma função $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, escrevemos $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se, dado $M > 0$ arbitrário, existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Deixamos ao leitor a tarefa de elaborar definições análogas à definição acima para $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0\pm} f(x) = \pm\infty$.

A proposição a seguir estabelece alguns limites infinitos simples. Sua prova não difere em grau de dificuldade da prova da proposição 6.7, de modo que a deixamos como exercício para o leitor.

Proposição 6.13. Dadas funções $f, g : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, temos

(a) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L > 0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, então $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \pm\infty$.

(b) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L < 0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, então $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \mp\infty$.

Voltemo-nos agora à consideração de **limites no infinito**.

Definição 6.14. Se existe $a > 0$ tal que $X \supset (a, +\infty)$ e $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função dada, escrevemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ se, dado $\epsilon > 0$, existir $A > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Assim como antes, deixamos ao leitor a tarefa de elaborar definições análogas à acima para $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Por outro lado, observe que a proposição 6.13 continua válida se $X \supset (a, +\infty)$ (resp. $X \supset (-\infty, b)$) e trocarmos x_0 por $+\infty$ (resp. $-\infty$), sendo as demonstrações nesses casos essencialmente as mesmas.

Um dos mais importantes usos de limites infinitos e no infinito é para a identificação das *assíntotas* horizontais e verticais do gráfico de uma função, de acordo com a seguinte

Definição 6.15. Se $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, dizemos que a reta $x = x_0$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de f. Analogamente, se $X \supset (a, +\infty)$ (resp. $X \supset (-\infty, b)$) e $f : X \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$), dizemos que a reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de f.

Problemas – Seção 6.1

1. Dada uma função $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, prove que se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existir, então ele é único.

2. * Estabeleça as generalizações dos itens (a) e (b) da proposição 6.7, conforme discutidas logo após a prova da mesma.

3. * Estenda a proposição 6.7 para limites laterais.

4. Prove a proposição 6.13 e sua análoga para limites no infinito.

5. Sejam $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funções tais que f é limitada e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Prove que $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$; em seguida, use este fato para mostrar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

6. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

7. Seja $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em $X \setminus \{x_0\}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$, prove que $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L$. Conclua, a partir daí, que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ não existe.

8. Se $X \supset (\alpha, +\infty)$ e $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função dada, dizemos que a reta $y = ax + b$ é uma **assíntota oblíqua** do gráfico de f se $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$. Nesse caso, prove que
$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax).$$
Em seguida, elabore o conceito de assíntota oblíqua $y = ax + b$ caso X contenha uma semirreta da forma $(-\infty, \beta)$, e mostre como calcular a e b nesse caso.

9. Em cada um dos itens a seguir, encontre as assíntotas verticais e oblíquas (cf. problema anterior) da função dada
   (a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$.
   (b) $f : \mathbb{R} \setminus (-a, a) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ para $|x| \geq a$.

10. * Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial tal que
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
com $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Prove que:
   (a) Se n é par, então $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) Se n é ímpar, então $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

11. (IMO.) Encontre todas as funções $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ satisfazendo as seguintes condições:
   (a) $f(xf(y)) = yf(x)$, para todos os $x, y > 0$.
   (b) $f(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$.

6.2 Propriedades básicas de derivadas

Tendo estabelecido firmemente o conceito de limite, retomamos, com a definição a seguir, a discussão que levou a (6.3).

Definição 6.16. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Fixado $x_0 \in I$, diremos que f é **derivável** em x_0 se existir o limite
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{6.11}$$
Nesse caso, tal limite será denominado a **derivada** de f em x_0, sendo denotado por $f'(x_0)$.

Nas notações da definição acima, observe que, quando escrevemos $f(x_0 + h)$, estamos supondo implicitamente que h é tão pequeno que $x_0 + h$ também pertençe a $I = \text{Dom}(f)$. Tal suposição não impõe restrição alguma à definição, uma vez que estamos calculando um limite e o domínio de f é um intervalo aberto. Note, ainda, que exigir que o limite acima exista é o mesmo que exigir que exista o limite
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Isto porque, fazendo $x_0 + h = x$, temos $h = x - x_0$ e, além disso, $h \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$. Portanto, sendo f derivável em $x_0 \in I$, podemos escrever
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{6.12}$$

A seguir, calculamos as derivadas de algumas funções simples.

Exemplo 6.17.

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função constante, então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x_0) = 0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Se $n \in \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada, para $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = x^n$, então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

(c) Se $n \in \mathbb{Z}$ é negativo e $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é a função dada, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, por $f(x) = x^n$, então f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$, para todo $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Prova.
(a) Sendo $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(b) Pela fórmula do desenvolvimento binomial, temos

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}[(x_0+h)^n - x_0^n] = \frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}h^k - x_0^n\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}h^{k-1},\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}h^{k-1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lim_{h\to 0} x_0^{n-k}h^{k-1} \\ &= \binom{n}{1} \lim_{h\to 0} x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}.\end{aligned}$$

(c) Se $n = -m$, com $m > 0$ inteiro, então

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x_0+h)^m} - \frac{1}{x_0^m}\right) \\ &= -\frac{1}{(x_0+h)^m x_0^m} \cdot \frac{1}{h}((x_0+h)^m - x_0^m).\end{aligned}$$

Mas, como $m > 0$, segue do item (b) que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= -\frac{1}{x_0^{2m}} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((x_0+h)^m - x_0^m) \\ &= -\frac{1}{x_0^{2m}} \cdot mx_0^{m-1} = -mx_0^{-m-1} = nx_0^{n-1}.\end{aligned}$$

■

A seguir, mostramos que a função seno é derivável e calculamos sua derivada em cada ponto da reta, aumentando assim nosso estoque de exemplos.

Exemplo 6.18. A função seno é derivável em todo $x_0 \in \mathbb{R}$, com $\operatorname{sen}' x_0 = \cos x_0$.

Prova. As fórmulas de transformação em produto nos dão

$$\frac{\operatorname{sen}(x_0+h) - \operatorname{sen} x_0}{h} = \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right).$$

Como a função cosseno é contínua, segue dos cálculos acima e do limite trigonométrico fundamental (cf. lema 6.9) que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}' x_0 &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \cos x_0 = \cos x_0.\end{aligned}$$

■

Observações 6.19. Antes de prosseguir com o desenvolvimento da teoria, teçamos duas observações úteis.

1. Uma vez que derivadas são limites, dada uma função $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, podemos considerar a **derivada lateral à direita** em a, i.e., o limite
$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$
caso tal limite exista. Analogamente, para $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ podemos considerar a **derivada lateral à esquerda** em b, i.e., o limite
$$f'_-(a) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$
(novamente caso tal limite exista). Ademais, sempre que dissermos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é derivável, ficará implícito que as derivadas de f em $x = a$ e $x = b$ são laterais; entretanto, sempre que não houver perigo de confusão, escreveremos simplesmente $f'(a)$ e $f'(b)$ (em vez de $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$) para denotar tais derivadas.

2. Por vezes, denotaremos a derivada de uma função f num ponto x_0 utilizando a notação alternativa (devida a Leibniz) $\frac{df}{dx}(x_0)$, de sorte que
$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
Tal simbologia se justifica pelo fato de que, classicamente, a fração do segundo membro acima era escrita como $\frac{\Delta f}{\Delta x}\Big|_{x_0}^{x}$ e, daí, $\frac{df}{dx}$ recorda que a derivada é o limite de tais quocientes, i.e.,
$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\Big|_{x_0}^{x}.$$

Voltando ao curso normal da teoria, se $I \subset \mathbb{R}$ for um intervalo e uma função $f : I \to \mathbb{R}$ for derivável em todo $x_0 \in I$, diremos simplesmente que f é *derivável em I*. Nesse caso, fica bem definida a **função derivada** $f' : I \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in I$ a derivada $f'(x)$ de f em x.

Para o exemplo a seguir, observamos que um cálculo imediato (cf. o problema 1) permite mostrar que se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in I$, então, fixado $c \in \mathbb{R}$, a função $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g = c \cdot f$ também é derivável em x_0, com
$$g'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

Exemplo 6.20. Se $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $f(x) = x^n$, então, de acordo com o item (b) do exemplo 6.17, a função derivada de f é a função $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f'(x) = nx^{n-1}$. Portanto, segue novamente daquele exemplo e do último parágrafo acima que f' é derivável, com $f''(x) = n(n-1)x^{n-1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

A definição de derivada, juntamente com a relação (6.3), nos permitem apresentar outra definição relevante.

Definição 6.21. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in I$. A **reta tangente** ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é a reta que passa por tal ponto e tem coeficiente angular igual a $f'(x_0)$.

Segue da definição acima e de (6.2) que a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ tem equação
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ilustramos a noção de reta tangente a um gráfico no exemplo a seguir.

Exemplo 6.22. Sejam $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a restrição da função de proporcionalidade inversa ao primeiro quadrante do plano Cartesiano e G_f seu gráfico. Sejam, ainda, A um ponto qualquer de G_f e P e Q os pontos sobre os eixos Cartesianos, tais que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tangencia G_f em A (cf. figura 6.5). Prove que:

(a) $\overline{AP} = \overline{AQ}$.

(b) Se O é a origem do sistema Cartesiano em questão, então a área do triângulo POQ independe da posição de A sobre G_f.

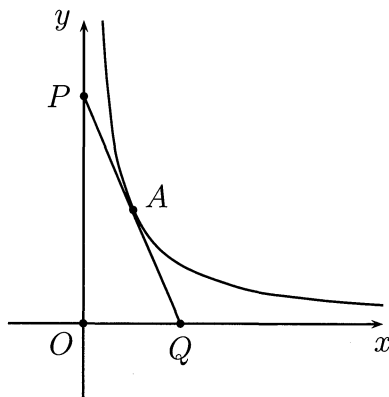



Figura 6.5: tangente ao gráfico de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Prova. Se $x_0 > 0$ e A é o ponto $(x_0, f(x_0)) = \left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$, então a reta tangente a G_f em A tem equação $y - \frac{1}{x_0} = f'(x_0)(x - x_0)$. Mas, como $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ (pelo exemplo 6.17), concluímos que a equação da reta em questão é $y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$ ou, ainda,

$$x_0^2 y + x = 2x_0.$$

Substituindo sucessivamente $x = 0$ e $y = 0$ em tal equação, obtemos $P\left(0, \frac{2}{x_0}\right)$ e $Q(2x_0, 0)$, ou vice-versa, e os itens (a) e (b) seguem imediatamente:

(a) $\overline{AP} = \overline{AQ} \Leftrightarrow 2A = P + Q$, o que é imediato verificar.

(b) $A(POQ) = \frac{1}{2}\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x_0} \cdot 2x_0 = 2.$ ■

Após os exemplos iniciais acima, a partir de agora estudamos de maneira mais sistemática o problema do cálculo de derivadas, adiando aplicações desse conceito para a próxima seção. Comecemos mostrando que uma função derivável em um ponto é necessariamente contínua em tal ponto.

Proposição 6.23. Se uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in I$, então f é contínua em x_0.

Prova. Para $x \in I$, a desigualdade triangular fornece

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| + |f'(x_0)(x - x_0)| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| + |f'(x_0)(x - x_0)|.\end{aligned}$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar $0 < \delta < 1$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, como a função $x \mapsto |f'(x_0)(x - x_0)|$ é claramente contínua, podemos supor que o δ escolhido acima também é tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f'(x_0)(x - x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, para tal δ temos que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

de modo que segue a continuidade de f. ■

O exemplo clássico a seguir mostra que existem funções não deriváveis em certos pontos de seus domínios.

Exemplo 6.24. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é contínua em toda a reta mas não é derivável em $x = 0$.

Prova. Para confirmar a afirmação do exemplo, observe que

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & \text{se } h>0\\ -1, & \text{se } h<0\end{cases}.$$

Portanto não existe $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$. ■

No que segue, apresentamos algumas *regras de derivação*, i.e., fórmulas que relacionam as derivadas de duas funções deriváveis dadas com a derivada de certas funções obtidas a partir das funções iniciais.

Proposição 6.25. Se $f,g:I\to\mathbb{R}$ são funções deriváveis em $x_0\in I$, então:

(a) $f\pm g$ é derivável em x_0, com $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.

(b) fg é derivável em a, com $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Prova.
(a) Provemos que $f+g$ é derivável em x_0, com $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$, sendo a prova das afirmações relativas a $f-g$ completamente análoga. Como

$$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h},$$

as propriedades operatórias de limites garantem que se $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ existirem, então $(f+g)'(x_0)$ também existirá e

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\&=f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

(b) Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h}&=\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)g(x_0+h)\\&\quad+\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)f(x_0).\end{aligned}\tag{6.13}$$

Agora, como g é derivável em x_0, segue da proposição 6.23 que g é contínua em x_0 e, daí,

$$\lim_{h\to 0}g(x_0+h)=g(x_0).$$

Portanto, fazendo $h\to 0$ em (6.13) e utilizando as propriedades operatórias de limites, concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x_0+h)\\&\quad+f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\&=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.26. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função polinomial dada por

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

com $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ e $a_n\neq 0$. Utilizando repetidas vezes o exemplo 6.17 e o item (a) da proposição anterior, concluímos que f é derivável em $\mathbb{R}$, com $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ também polinomial, tal que

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1,$$

para todo $x\in\mathbb{R}$.

A mais importante dentre todas as regras de derivação é a **regra da cadeia** para derivadas, a qual é o objeto do teorema 6.14 a seguir, para cuja prova precisamos de alguns preliminares.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Para cada $x \in I$ e $h \neq 0$ tal que $x + h \in I$, definindo

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$$

temos $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h)$ e

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) = 0,$$

pela definição de derivada. Reciprocamente, temos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 6.27. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada e $x_0 \in I$. Se existir um número real L tal que $r(h) = f(x+h) - f(x) - Lh$ satisfaça a condição $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, então a função f é derivável em x_0, com $f'(x_0) = L$.

Prova. A condição dada equivale a

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L \right) = 0$$

ou, o que é o mesmo, a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = L.$$

■

A prova do teorema a seguir pode ser omitida numa primeira leitura.

Teorema 6.28. Se $I, J \subset \mathbb{R}$ são intervalos abertos e $g : I \to J$ e $f : J \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis, então $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ também é derivável, com

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x), \tag{6.14}$$

para todo $x \in I$.

Prova. Sejam $x \in I$ e $y = g(x)$. A derivabilidade de f, juntamente com o lema anterior, nos permite escrever

$$f(y+t) = f(y) + tf'(y) + s(t),$$

onde $\lim_{t\to 0} \frac{s(t)}{t} = 0$. Analogamente, a derivabilidade de g e o lema anterior fornecem

$$g(x+h) = g(x) + hg'(x) + r(h),$$

onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Se $\eta(h) = g'(x) + \frac{r(h)}{h}$, a condição $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ garante que a função η é limitada para h próximo de 0. Agora,

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x) &= f(g(x+h)) - f(g(x)) \\
&= f(g(x) + hg'(x) + r(h)) - f(g(x)) \\
&= f(g(x) + h\eta(h)) - f(g(x)) \\
&= f'(g(x))h\eta(h) + s(h\eta(h)) \\
&= f'(g(x))(hg'(x) + r(h)) + s(h\eta(h)) \\
&= f'(g(x))g'(x)h + f'(g(x))r(h) + s(h\eta(h)).
\end{aligned}$$

Portanto, para mostrarmos que $f \circ g$ é derivável em x e que vale (6.14), é suficiente, pelo lema anterior, provarmos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(g(x))r(h) + s(h\eta(h))}{h} = 0.$$

Já temos $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Quanto a $\frac{s(h\eta(h))}{h}$, há dois casos a considerar:

(i) Onde $\eta(h) = 0$, temos $s(h\eta(h)) = s(0) = 0$.

(ii) Onde $\eta(h) \neq 0$, temos

$$\frac{s(h\eta(h))}{h} = \frac{s(h\eta(h))}{h\eta(h)} \cdot \eta(h).$$

Mas, como $\eta(h)$ é limitada para h próximo de 0, segue da proposição 6.10 que $\lim_{h\to 0} h\eta(h) = 0$ e, da igualdade acima, concluímos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(h\eta(h))}{h} = 0.$$

■

Exemplo 6.29. A regra da cadeia nos permite calcular a derivada da função cosseno. De fato, $\cos x = (\text{sen} \circ g)(x)$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $g(x) = \frac{\pi}{2} - x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, temos pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \cos' x &= (\text{sen} \circ g)'(x) = \text{sen}' g(x) \cdot g'(x) = \cos g(x) \cdot (-1) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}\, x. \end{aligned}$$

Exemplo 6.30 (Canadá). Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$ não é periódica.

Prova. Primeiramente, observe que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função derivável e periódica, então sua derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, além de contínua (cf. proposição 6.23), será também periódica. De fato, sendo $f(x) = f(x + \tau)$, para algum real $\tau > 0$, temos pela regra da cadeia que $f'(x) = f'(x + \tau)$, de sorte que τ também é um período para f'. Segue, daí, que

$$\text{Im}\,(f') = \text{Im}\,(f'_{|[0,\tau]}),$$

e a continuidade de f' garante, juntamente com o corolário 4.32, que f' é uma função limitada.

Agora, sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada para $x \in \mathbb{R}$ por $g(x) = x^2$, temos $f(x) = (\text{sen} \circ g)(x)$, de sorte que a regra da cadeia fornece

$$f'(x) = \text{sen}' g(x) \cdot g'(x) = 2x \cos(x^2).$$

Portanto, se $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$ fosse periódica, a discussão do parágrafo anterior garantiria que f' seria limitada, o que, obviamente, não é o caso e nos fornece uma contradição. ■

Corolário 6.31. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis em I, com $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ é derivável em I, com

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2},$$

para todo $x \in I$.

Prova. Se $\tau : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é a função de proporcionalidade inversa, i.e., se $\tau(x) = x^{-1}$, para $x \neq 0$, então, pelo item (c) do exemplo 6.17, τ é derivável e $\tau'(x) = -x^{-2}$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por outro lado, temos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot (\tau \circ g)(x)$$

para todo $x \in I$, de sorte que as regras de derivação de um produto e da cadeia fornecem

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= f'(x) \cdot (\tau \circ g)(x) + f(x) \cdot (\tau \circ g)'(x) \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \tau'(g(x))g'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)(-g(x)^{-2})g'(x) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 6.32. Se $D = \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, então a função tangente $\text{tg} : \mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$ é derivável e $\text{tg}'x = \sec^2 x$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus D$. De fato, segue da fórmula do corolário anterior que

$$\text{tg}'x = \frac{\text{sen}'x \cos x - \text{sen}\, x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Examinemos, agora, a derivabilidade da inversa de uma função derivável.

Teorema 6.33. Sejam $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos abertos e $f : I \to J$ uma bijeção derivável. Se $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então $f^{-1} : J \to I$ é derivável em J. Ainda nesse caso, se $x \in I$ e $y = f(x) \in J$, então

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{6.15}$$

Prova. Vamos nos limitar a deduzir a fórmula para $(f^{-1})'(y)$, assumindo a derivabilidade de f^{-1} (para uma prova deste fato, referimos ao leitor o capítulo 8 de [34]). Por simplicidade de notação, seja $g = f^{-1}$. Como $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in I$, temos $(g \circ f)'(x) = 1$, para todo $x \in I$. Portanto, a regra da cadeia garante que

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

para todo $x \in I$, de modo que, pondo $y = f(x) \in J$, obtemos

$$g'(y) = g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

■

Como aplicação do teorema acima, mostramos no exemplo a seguir que a função arco-tangente (cf. exemplo 4.23) é derivável e calculamos sua derivada.

Exemplo 6.34. A função $\text{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é derivável, com

$$\text{arctg}'y = \frac{1}{1+y^2}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$.

Solução. Inicialmente, observe que $\text{tg}'x = \sec^2 x \neq 0$, para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, de sorte que a função arctg é derivável pelo teorema anterior. Ademais, se $y \in \mathbb{R}$ e $x = \text{arctg}\, y$, então $y = \text{tg}\, x$ e (6.15) fornece

$$\text{arctg}'y = \frac{1}{\text{tg}'x} = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

■

Terminamos esta seção apresentando, ao leitor, o conceito de derivada de ordem superior. Para tanto, sejam dados um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é **duas vezes derivável** em $x_0 \in I$ se existir um intervalo $J \subset I$ contendo x_0, tal que f é derivável em J e a função derivada $f' : J \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in I$. Nesse caso, dizemos que $(f')'(x_0)$ é a **derivada segunda** de f em x_0, a qual será denotada doravante simplesmente por $f''(x_0)$. Se f for derivável em I e f' também for derivável em I, diremos simplesmente que f é duas vezes derivável em I, e fica bem definida a **função derivada segunda** $f'' : I \to \mathbb{R}$.

Mais geralmente, seja dado $k \in \mathbb{N}$ e suponha que já definimos o que se entende por f ser k vezes derivável em I, bem como o que se entende pela k−ésima derivada $f^{(k)}(x_0)$, de f em $x_0 \in I$. Denotando por $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ a função k−ésima derivada de f, definimos a $(k+1)$−ésima derivada de f em x_0 pondo

$$f^{(k+1)}(x_0) = (f^{(k)})'(x_0),$$

caso tal derivada exista.

Por fim, se $f^{(k)}(x_0)$ existe, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in I$, dizemos que f é *infinitamente derivável* em I.

Exemplo 6.35. As funções sen, cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são infinitamente deriváveis, com

$$\text{sen}^{(4k)} = \text{sen}\,,\ \text{sen}^{(4k+1)} = \cos,\ \text{sen}^{(4k+2)} = -\text{sen}\,,\ \text{sen}^{(4k+3)} = -\cos$$

e

$$\cos^{(4k)} = \cos,\ \cos^{(4k+1)} = -\text{sen}\,,\ \cos^{(4k+2)} = -\cos,\ \cos^{(4k+3)} = \text{sen}\,,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Problemas – Seção 6.2

1. * Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in I$. Fixado $c \in \mathbb{R}$, prove que a função $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g = c \cdot f$ também é derivável em x_0, com
$$g'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

2. Seja r um racional não nulo e $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x^r$. Prove que f é derivável, com $f'(x) = rx^{r-1}$ para todo $x > 0$.

3. Dado $R > 0$, seja $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Prove que:
   (a) O gráfico de f é o semicírculo de centro na origem do plano Cartesiano, contido no semiplano superior do mesmo e com raio R.
   (b) Dados $x_0 \in (-R, R)$ e $A(x_0, f(x_0))$, a reta tangente ao gráfico de f, obtida de acordo com a definição 6.21, coincide com a reta que passa por A e é perpendicular ao raio OA.

4. * No exemplo 4.23, definimos as funções arcsen : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ como as inversas das funções sen : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ e cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$, respectivamente. Use o teorema 6.33 para provar que as restrições das funções arcsen e arccos ao intervalo aberto $(-1, 1)$ são deriváveis, com
$$\text{arcsen}'x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{e} \quad \text{arccos}'\,x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$
para todo $x \in (-1, 1)$.

5. Prove que a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada para $x > 0$ por $f(x) = \text{sen}\,\sqrt{x}$, não é periódica.

6. * Prove a versão a seguir da **regra de l'Hôspital**[1]: se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis em $x_0 \in I$ e tais que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $g'(x_0) \neq 0$, então
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

7. Se a é um real positivo, prove que $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

8. Seja $\mathcal{P}$ a parábola de foco F e diretriz d. Se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ são tais que $F \in P_1P_2$, prove que as tangentes a $\mathcal{P}$ traçadas pelos pontos P_1 e P_2 intersectam-se sobre a reta d.

9. (OBMU.) Se $f(x) = e^{-x}\text{sen}\,x$ e $f^{(n)}$ denota a n–ésima derivada de f, calcule $f^{(2001)}(0)$.

10. (OBMU.) Dados reais não nulos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, mostre que o período da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada para $x \in \mathbb{R}$ por
$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx),$$

[1] Após o matemático francês do século XVII Guillaume F. Antoine, Marquês de l'Hôspital.

é exatamente 2π.

Para o próximo problema, o leitor achará conveniente dispor de uma extensão da definição de $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ao caso de uma função $f : X \to \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio qualquer, e $x_0 \in \mathbb{R}$ é o limite de uma sequência de elementos distintos de X (por exemplo – e esse será, essencialmente, o caso de nosso interesse no problema em questão –, podemos ter $X = \mathbb{Q}$ e $x_0 = \sqrt{2}$). Felizmente, tal extensão é formalmente idêntica à definição de que já dispomos: dizemos que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe e é igual a L se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (dependendo de ϵ) tal que

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

11. (OIMU.) Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q^3}, & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ com } p, q \in \mathbb{N};\ \text{mdc}\,(p,q) = 1 \end{cases}.$$

Se $k \in \mathbb{N}$ não é quadrado perfeito, mostre que f é derivável em $x = \sqrt{k}$.

6.3 A primeira variação de uma função

Vimos, na seção 4.3, que toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ atinge valores extremos (i.e., máximo e mínimo) em $[a, b]$. Nesta seção, analisaremos se, adicionando hipóteses genéricas razoáveis sobre f (por exemplo, supondo f derivável), existe algum procedimento que nos permita calcular efetivamente os pontos extremos correspondentes.

Em tudo o que segue, I denota um intervalo da reta. Ademais, o **interior** de I é o intervalo obtido de I pela exclusão de sua(s) extremidade(s), caso ela(s) exista(m). Por exemplo, se $I = [a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ ou (a, b), o interior de I é o intervalo (a, b); analogamente, se $I = [a, +\infty)$ ou $(a, +\infty)$, seu interior é o intervalo $(a, +\infty)$ etc.

Nosso propósito nesta seção é resolver o problema descrito no primeiro parágrafo para funções $f : I \to \mathbb{R}$ contínuas em I e deriváveis em seu interior. Para tanto precisamos, inicialmente, da definição a seguir.

Definição 6.36. Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, dizemos que $x_0 \in I$ é ponto de **máximo local** (resp. **mínimo local**) para f se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$), para todo $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I$.

Genericamente, um ponto de máximo ou mínimo local para uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é denominado um **extremo local** de f. Se I for um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ for derivável, mostraremos a seguir que os extremos locais de f são zeros da derivada f' de f. Entretanto, uma vez que tais zeros desempenham papel preponderante na discussão subsequente, antes de apresentarmos a prova desse resultado introduzimos uma nomenclatura relevante.

Definição 6.37. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, dizemos que $x_0 \in I$ é um **ponto crítico** de f se $f'(x_0) = 0$.

Podemos, agora, enunciar e provar o seguinte resultado fundamental, conhecido como o **teste da primeira derivada** para extremos locais.

Proposição 6.38. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, então todo extremo local de f também é ponto crítico.

Prova. Analisemos o caso em que $x_0 \in I$ é um ponto de mínimo local para f, sendo a prova no outro caso totalmente análoga.

Tome $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ e

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0.$$

Para $0 < h < \delta$, temos então que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

de sorte que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Raciocinando de modo análogo com $0 > h > -\delta$, concluímos que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

e, daí, $f'(x_0) = 0$. ■

Como corolário do teste da primeira derivada, temos o seguinte critério de pesquisa de pontos extremos.

Corolário 6.39. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I e derivável no interior de I. Se f atinge um valor extremo (máximo ou mínimo) em I, então o ponto extremo correspondente é uma das extremidades de I ou um ponto crítico de f.

Prova. Seja $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = \min\{f(x);\, x \in I\}$ (o caso em que $x_0 \in I$ é ponto de máximo pode ser tratado de modo análogo). Se x_0 for uma extremidade de I, nada mais há a fazer. Senão, x_0 pertence ao interior de I, o qual é um intervalo aberto, e o teste da primeira derivada garante que x_0 é ponto crítico de f. ■

Nosso próximo resultado é um importante teorema devido a J. L. Lagrange e conhecido como o **teorema do valor médio** (abreviado **TVM**). Para a prova do mesmo, recordamos (cf. teorema 4.31) que

uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ atinge valores extremos em $[a, b]$; de outra forma, para uma tal f existem $x_m, x_M \in [a, b]$, tais que

$$\begin{aligned} f(x_m) &= \min\{f(x);\, x \in [a, b]\} \\ f(x_M) &= \max\{f(x);\, x \in [a, b]\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Teorema 6.40 (Lagrange). Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Prova. Suponhamos, primeiramente, que $f(a) = f(b) = 0$ e mostremos que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Para tanto, sejam $x_m, x_M \in [a, b]$ como em (6.16). Se $x_m, x_M \in \{a, b\}$, então, para todo $x \in [a, b]$, temos

$$0 = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = 0,$$

de sorte que f é identicamente nula em $[a, b]$, e nada há a fazer. Senão, suponha, sem perda de generalidade, que $x_M \in (a, b)$. Então o teste da primeira derivada garante que $f'(x_M) = 0$, e basta tomar $c = x_M$.

Para o caso geral, seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$g(x) = f(x) - \left[\left(\frac{b - x}{b - a} \right) f(a) + \left(\frac{x - a}{b - a} \right) f(b) \right],$$

para todo $x \in [a, b]$. Claramente g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $g(a) = g(b) = 0$ e

$$g'(x) = f'(x) - \left(\frac{-f(a)}{b - a} + \frac{f(b)}{b - a} \right).$$

Portanto, tomando $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$ (cuja existência é garantida pela primeira parte da prova), obtemos, a partir da igualdade acima, que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Nas notações do TVM, observamos que o caso particular $f(a) = f(b) = 0$ do mesmo precede Lagrange, sendo devido ao matemático francês do século XVII Michel Rôlle e conhecido na literatura como o **teorema de Rôlle**.

Geometricamente, tendo em vista a discussão do início da seção 6.1 sobre a reta tangente ao gráfico de uma função derivável, o TVM garante (nas notações de seu enunciado) a existência de $c \in (a,b)$ tal que a tangente ao gráfico de f passando pelo ponto $(c, f(c))$ é paralela à secante que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Além disso, o TVM admite várias consequências relevantes, as quais elencamos a partir de agora.

Corolário 6.41. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, então:

(a) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função constante.

(b) Se existe $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f'(x) = m$ para todo $x \in I$, então f é uma função afim.

Prova. Fixe $[a,b] \subset I$ e seja $x \in (a,b]$ um ponto qualquer. Pelo TVM, existe $c \in (a,x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Analisemos, agora, os itens (a) e (b) separadamente:

(a) Nas hipóteses do item (a), temos $f'(c) = 0$, de modo que $f(x) = f(a)$. Mas, como $x \in (a,b]$ foi escolhido arbitrariamente, segue que f é constante em $[a,b]$. Por fim, como I é a união de intervalos encaixantes $[a_i, b_i]$ (verifique este fato!), concluímos que f é constante em I.

(b) Nas hipóteses do item (b), se $g : I \to \mathbb{R}$ é a função definida por $g(x) = f(x) - mx$ para todo $x \in I$, então g é derivável e $g'(x) =$

$f'(x) - m = 0$, para todo $x \in I$. Portanto, segue do item (a) que g é constante, digamos $g(x) = n$ para todo $x \in I$, e segue, daí, que $f(x) = mx + n$ para todo $x \in I$, conforme desejado.

■

Exemplo 6.42 (OIMU). Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$(f(x) - f(y))^2 \leq |x - y|^3,$$

para todos os $x, y \in \mathbb{R}$.

Solução. Se f é uma de tais funções, então, fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, temos

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|^2 \leq |x - x_0|,$$

para todo $x \neq x_0$. Fazendo agora $x \to x_0$, concluímos que f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = 0$. Mas, como x_0 foi escolhido arbitrariamente em $\mathbb{R}$, segue que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de sorte que, pelo corolário anterior, f é constante.

Por fim, é imediato verificar que toda função constante satisfaz as condições do enunciado. ■

A próxima consequência do TVM nos ensina como obter os intervalos de monotonicidade de uma função derivável. A proposição a seguir é por vezes referida na literatura como o estudo da **primeira variação** de uma função derivável[2].

Proposição 6.43. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em I e derivável no interior de I, então:

(a) $f' \geq 0$ no interior de I se, e só se, f é não decrescente em I.

[2]Essa terminologia alude ao papel preponderante da primeira derivada no resultado em questão, bem como ao fato de que, classicamente, a primeira derivada de uma função derivável era denominada sua *primeira variação*.

(b) Se $f' > 0$ no interior de I, então f é crescente em I, mas a recíproca não é válida.

(c) $f' \leq 0$ no interior de I se, e só se, f é não crescente em I.

(d) Se $f' < 0$ no interior de I, então f é decrescente em I, mas a recíproca não é válida.

Prova. Provemos somente os itens (a) e (b), sendo a prova dos itens (c) e (d) inteiramente análoga.

(a) Suponha primeiro f não decrescente em I. Para um ponto x no interior de I, tome $\delta > 0$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \subset I$. Se $0 < h < \delta$, então $x+h \in I$, de sorte que $f(x+h) - f(x) \geq 0$. Portanto, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ e, fazendo $h \to 0+$, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Reciprocamente, suponha que $f' \geq 0$ no interior de I. Se $a, b \in I$ são tais que $a < b$, a continuidade de f em I garante sua continuidade também em $[a, b]$. Por outro lado, como (a, b) está contido no interior de I, temos f derivável em (a, b), de sorte que o TVM garante a existência de $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0.$$

Logo, $f(b) \geq f(a)$, e a arbitrariedade da escolha de $a < b$ em I garante que f é não decrescente em I.

(b) Suponha que $f' > 0$ no interior de I, e sejam $a < b$ dois pontos quaiquer de I. Novamente pelo TVM, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) > 0,$$

de modo que $f(b) > f(a)$. Logo, f é crescente em I.

Para ver que a recíproca não é verdadeira, considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Ela é crescente em toda a reta, mas $f'(0) = 0$. ■

Agora, vejamos como utilizar os resultados acima para estudar máximos e mínimos de funções.

Exemplo 6.44. Se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é a função dada por $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$, mostre que f atinge um valor mínimo em $[0, +\infty)$ e calcule tal valor.

Solução. Se f atinge um valor mínimo em $[0, +\infty)$, o corolário 6.39 garante que tal ocorre em 0 ou em um ponto crítico de f.

Calculando a primeira derivada de f, obtemos

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2},$$

de sorte que $f'(x) = 0$ se, e só se, $x = 1$ (lembre-se de que devemos ter $x \geq 0$). Por outro lado, como $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, concluímos que f' é negativa no intervalo $(0, 1)$ e positiva no intervalo $(1, +\infty)$. Portanto, a proposição anterior garante que f é decrescente no intervalo $[0, 1]$ e crescente no intervalo $[1, +\infty)$, de modo que segue que f realmente atinge seu valor, o fazendo em $x = 1$. Logo, o valor mínimo de f é $f(1) = 2$. ■

O exemplo a seguir utiliza o estudo da primeira variação de uma função para dar uma outra prova da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Exemplo 6.45. Dados $n > 1$ inteiro e reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, use a proposição 6.43 para provar que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Prova. Façamos indução sobre $n > 1$, sendo a prova do caso $n = 2$ aquela apresentada na seção 7.2 do volume 1. Seja dado $k > 2$ inteiro e suponha, por hipótese de indução, que já provamos a desigualdade do enunciado para quaisquer $n = k - 1$ reais positivos, com igualdade se, e só se, eles forem todos iguais.

Dados k reais positivos $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k$, seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada para $x > 0$ por

$$f(x) = a_1 + \cdots + a_{n-1} + x - n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_{n-1}x}.$$

Se mostrarmos que $f(x) \geq 0$ para todo $x > 0$, com igualdade se, e só se, $a_1 = \cdots = a_{n-1} = x$, concluiremos em particular que $f(a_n) \geq 0$, com igualdade se, e só se, $a_1 = \cdots = a_{n-1} = a_n$, conforme desejado. Para tanto, observe que f é derivável, com

$$f'(x) = 1 - \sqrt[n]{a_1 \ldots a_{n-1}}x^{1/n-1}$$

para todo $x > 0$. Portanto, sendo $x_0 = \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}$, temos $f' < 0$ em $(0, x_0)$, $f'(x_0) = 0$ e $f' > 0$ em $(x_0, +\infty)$, de maneira que f é decrescente em $(0, x_0]$ e crescente em $[x_0, +\infty)$. Assim, atinge seu valor mínimo em $x = x_0$, sendo $f(x) = f(x_0)$ se, e só se, $x = x_0$.

Por fim, uma simples substituição fornece

$$f(x_0) = a_1 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}, \tag{6.17}$$

de modo que $f(x_0) \geq 0$, pela hipótese de indução. Logo,

$$f(x) \geq f(x_0) \geq 0$$

para todo $x > 0$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $x = x_0$ e $f(x_0) = 0$. Basta agora observar que, graças a (6.17) e à hipótese de indução, $f(x_0) = 0$ se, e só se, $a_1 = \cdots = a_{n-1}$, de forma que há igualdade se, e só se, $a_1 = \cdots = a_{n-1} = x$. ■

Problemas – Seção 6.3

1. Prove a proposição 1.25 utilizando os métodos desenvolvidos nesta seção.

2. Utilize o estudo da primeira variação para encontrar, se houver, o valor máximo da função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada, para $x \geq 0$, por $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+16}$.

3. Encontre, se houver, os valores máximo e mínimo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada, para $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{x}{ax^2+b}$, onde a e b são reais positivos dados.

4. Prove que $e^x > 1 + x$, para $x > 0$.

5. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

mostre que f é duas vezes derivável em $\mathbb{R}$, com $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $0 \leq k \leq 2$ (com um pouco mais de trabalho, pode-se mostrar que f é infinitamente derivável em $\mathbb{R}$, com $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \geq 0$).

6. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, tais que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável e tal que $f''(x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$f(x) = f(0)\cos x + f'(0)\operatorname{sen} x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Mostre que $\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{m}{n}\right)^n$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

9. A função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f'(x)| \leq c < 1$ para todo real x, onde c é uma constante real positiva. Mostre que existe um único $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = x_0$.

10. Para cada real $p > 1$, calcule o menor valor possível da soma $x + y$, onde x e y são reais tais que

$$(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = p.$$

11. (Romênia.) Calcule o menor valor possível da expressão

$$x + y + \frac{2}{x + y} + \frac{1}{2xy},$$

para x, y reais positivos.

12. (BMO.) Em um triângulo ABC, temos

$$\operatorname{sen}^{23}\frac{\widehat{A}}{2}\cos^{48}\frac{\widehat{B}}{2} = \operatorname{sen}^{23}\frac{\widehat{B}}{2}\cos^{48}\frac{\widehat{A}}{2}.$$

Calcule a razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

13. Prove a seguinte generalização do TVM, devida a Cauchy: se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

14. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $c \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $I \setminus \{c\}$. Se existe $L = \lim_{x \to c} f'(x)$, prove que f é derivável em c, com $f'(c) = L$.

15. * O propósito deste problema é provar o famoso **teorema de Darboux**[3]: se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, então a função $f' : I \to \mathbb{R}$ (ainda que não seja contínua) satisfaz a propriedade do valor intermediário. Para tanto, tome $a < b$ em I e prove que:

    (a) Se $f'(a) < 0 < f'(b)$ (ou vice-versa), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

    (b) Se $f'(a) < d < f'(b)$ (ou vice-versa), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.

16. (Romênia.) Prove que não existe função derivável $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ tal que, para todos x, y reais positivos, tenhamos

$$f(x)^2 \geq f(x + y)(f(x) + y).$$

17. (Leningrado.) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial tal que

$$f(x) - f'(x) - f''(x) + f'''(x) \geq 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, prove que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. (OIMU.) Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua, derivável no intervalo $(0, 1)$ e tal que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Prove que existem $a, b \in [0, 1]$ distintos e tais que $f'(a)f'(b) = 1$.

19. (OBMU.) Encontre todas as funções deriváveis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq |f(x)|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

6.4 O teorema fundamental do Cálculo

Retomemos por um momento o caso de uma função contínua e positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é a integral indefinida de f

[3] Após o matemático francês dos séculos XIX e XX Jean-Gaston Darboux.

baseada em a e $x_0 < x$ pertencem ao intervalo $[a, b]$, sabemos que

$$F(x) - F(x_0) = A(f_{|[a,x]}) - A(f_{|[a,x_0]}) = A(f_{|[x_0,x]}).$$

Por outro lado, uma vez que f é contínua, é razoável supor que uma boa aproximação para $A(f_{|[x_0,x]})$ seja a área do trapézio que tem o segmento $[x_0, x]$ como um de seus lados não paralelos e bases de comprimentos $f(x_0)$ e $f(x)$ (cf. figura 6.6).

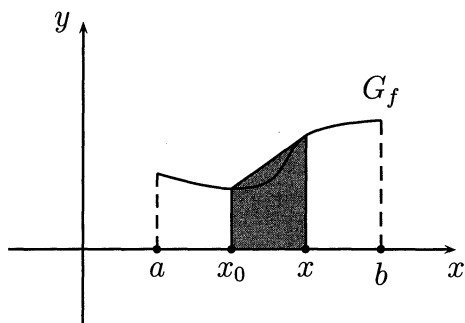



Figura 6.6: aproximando a área sob o gráfico de f.

Ademais, também é razoável supor que tal aproximação seja tanto melhor quanto mais próximo x estiver de x_0, de maneira que

$$A(f_{|[x_0,x]}) \approx \left(\frac{f(x_0) + f(x)}{2}\right)(x - x_0)$$

para $x - x_0$ pequeno. Portanto, concluímos que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \approx \frac{f(x_0) + f(x)}{2},$$

para $x - x_0$ pequeno, sendo tal aproximação tanto melhor quanto mais próximo x estiver de x_0.

Fazendo $x \to x_0$, a heurística acima sugere a existência da derivada de F em x_0, com

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x_0) + f(x)}{2}\right) = f(x_0)$$

pela continuidade de f.

O propósito principal desta seção é colocar o argumento acima em bases rigorosas. Para tanto, começamos recordando que, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e F é uma integral indefinida de f, digamos baseada em $\alpha \in [a, b]$, então

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt,$$

para todo $x \in [a, b]$. Em particular, para $x_0, x \in [a, b]$, temos

$$F(x) - F(x_0) = \int_\alpha^x f(t)dt - \int_\alpha^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt. \qquad (6.18)$$

Isto posto, podemos enunciar e provar o resultado principal desta seção, o qual se constitui em um dos mais importantes resultados básicos do Cálculo, sendo conhecido na literatura como o **teorema fundamental do Cálculo**.

Teorema 6.46. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma integral indefinida de f, então F é derivável no intervalo $[a, b]$, com $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Prova. Fixado $x_0 \in [a, b]$, temos, a partir de (6.18), que, para $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0)\right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt\right|,
\end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade triangular para integrais (cf. problema 6, página 163) na última igualdade acima (o módulo fora da integral se deve a que, se $x < x_0$, então $\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|dt \leq 0$).

A continuidade de f garante agora que, para $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [a,b], \ |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Portanto, para $|x - x_0| < \delta$, temos $|t - x_0| < \delta$ para todo t pertencente ao intervalo de extremidades x_0 e x, de modo que

$$\left|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \epsilon dt\right| = \epsilon|x - x_0|.$$

Por fim, os cálculos acima garantem que, para $x \in [a,b]$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, temos

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \epsilon|x - x_0| = \epsilon,$$

e F é derivável em x_0, com $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

No que segue, colecionamos algumas consequências úteis do teorema fundamental do Cálculo.

Corolário 6.47. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma integral indefinida de f, então F é contínua no intervalo $[a,b]$. Em particular,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x)dx. \tag{6.19}$$

Prova. Se $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma integral indefinida de f, o teorema fundamental do Cálculo garante que F é derivável, logo contínua pela proposição 6.23. Para o que falta, segue de (6.18) que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt. \tag{6.20}$$

Por outro lado, se F é baseada em x_0, a continuidade de F garante que

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \lim_{\epsilon \to 0+} (F(b-\epsilon) - F(a+\epsilon)) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_{x_0}^{b-\epsilon} f(t)dt - \int_{x_0}^{a+\epsilon} f(t)dt\right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a-\epsilon}^{b-\epsilon} f(t)dt. \end{aligned}$$

Por fim, basta combinar (6.20) com a igualdade acima. ■

Se F é a integral indefinida de f baseada em $x_0 \in [a,b]$, sabemos que

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt,$$

para todo $x \in [a,b]$. Portanto, obtemos a partir do teorema fundamental do Cálculo a fórmula

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x). \tag{6.21}$$

Exemplo 6.48. A função logaritmo natural $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é derivável e tal que $\log' x = \frac{1}{x}$, para todo $x \in (0,+\infty)$. De fato, como

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

é a integral indefinida da função de proporcionalidade inversa baseada em 1, segue de (6.21) que

$$\log' x = \frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{x}.$$

A função exponencial $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável e tal que $\exp'(x) = \exp(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, como a derivada da função logaritmo natural é sempre não nula, se $x \in \mathbb{R}$ e $y = \exp(x)$, segue do

teorema 6.33 que

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log' y} = y = \exp(x).$$

Vimos, no exemplo anterior, que a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável e igual à sua derivada. Reciprocamente, veremos a seguir que tal propriedade caracteriza a função exponencial.

Proposição 6.49. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, tal que $f(0) = 1$ e $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f = \exp$.

Solução. Consideremos a função auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada, para $x \in \mathbb{R}$, por $g(x) = e^{-x}f(x)$. Calculando a derivada de g, obtemos

$$g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f(x) = 0,$$

e o corolário 6.41 garante que g é uma função constante. Mas, como $g(0) = e^0 f(0) = 1$, segue que $g(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e, daí, $f(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Mostremos, agora, como utilizar o teorema fundamental do Cálculo para calcular integrais efetivamente. Antes, contudo, precisamos de uma definição.

Definição 6.50. Dados um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$, uma **primitiva** de f em I é uma função derivável $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

Em termos do conceito acima, o teorema fundamental do Cálculo mostra que toda integral indefinida de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f em $[a, b]$. Reciprocamente, temos a seguinte

Proposição 6.51. Sejam dados um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$. Se $F : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f em I, então, fixado $x_0 \in I$, temos

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \tag{6.22}$$

para todo $x \in I$.

Prova. Se $G : I \to \mathbb{R}$ é a função do segundo membro de (6.22), segue de (6.21) que $G'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$. Portanto,

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

para todo $x \in I$, e segue do corolário 6.41 a existência de $c \in \mathbb{R}$ tal que $(F - G)(x) = c$, para todo $x \in I$. Mas, como $F(x_0) = G(x_0)$, temos $c = 0$ e nada mais há a fazer. ■

De posse da proposição acima, o corolário a seguir garante que, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então, para calcular a integral $\int_a^b f(x)dx$, é suficiente encontrar uma primitiva de f.

Doravante, dada uma função contínua $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, denotamos

$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Corolário 6.52. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f, então

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}. \tag{6.23}$$

Prova. Faça $x_0 = a$ e $x = b$ em (6.22). ■

Exemplo 6.53. Calcule cada uma das integrais $\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx$, $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x dx$ e $\int_0^\pi \cos^2 x dx$.

Solução. Como a função $-\cos$ é uma primitiva da função sen, segue do corolário anterior que

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx = -\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

Quanto à segunda integral, como $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ e $\frac{d}{dx}\text{sen}\, 2x = 2\cos 2x$, temos

$$\int_0^\pi \text{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\text{sen}\, 2x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Por fim, como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos

$$\int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi (1 - \text{sen}^2 x)dx = x\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \text{sen}^2 x dx = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

■

Nos cursos tradicionais de Cálculo, considerável quantidade de tempo é devotada ao desenvolvimento de técnicas para o cálculo de integrais, técnicas estas conhecidas genericamente por *técnicas de integração*. A proposição a seguir, corolário imediato do teorema fundamental do Cálculo, traz a que talvez seja a mais útil de todas elas, a **fórmula de integração por partes**.

Proposição 6.54. Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis e com derivadas contínuas no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{6.24}$$

Prova. Basta observar que, pelo teorema fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = \int_a^b (fg)'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

■

O corolário a seguir da fórmula de integração por partes é por vezes bastante útil.

Corolário 6.55. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável e com derivada contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = xf(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b xf'(x)dx. \tag{6.25}$$

Prova. Trocando f por g em (6.24), obtemos

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Basta, agora, fazer $g(x) = x$ para todo $x \in [a, b]$ na igualdade acima.

■

Como aplicação da fórmula de integração por partes, utilizamos o conceito de integral para calcular, no exemplo a seguir, a área de um círculo de raio R.

Exemplo 6.56. Use o material desenvolvido até aqui para dar outra demonstração de que um círculo de raio R tem área igual a πR^2.

Prova. Seja Γ um círculo de centro O e raio R, e escolha um sistema Cartesiano de coordenadas tal que $O(0, 0)$. Se $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$ é a função dada, para $x \in [-R, R]$, por $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, então a região R_f sob o gráfico de f é um semicírculo de raio R, de forma que

$$A(\Gamma) = 2A(R_f) = 2\int_{-R}^R f(x)dx = 2\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2}dx.$$

Agora, a ideia é aplicarmos a fórmula (6.25) para calcular a última integral acima. Contudo, como $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, a qual não está definida para $x = \pm R$, não podemos fazê-lo diretamente; em vez disso, utilizamos (6.25) em conjunção com (6.19), conforme descrito a seguir.

Para $0 < \epsilon < \frac{R}{2}$, segue de (6.19) e (6.25) que

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx &= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon}\sqrt{R^2-x^2}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(x\sqrt{R^2-x^2}\Big|_{x=-R+\epsilon}^{x=R-\epsilon}+\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon}\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dx\right)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon}\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dx.\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{x^2-R^2+R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}=-\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

temos

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx &= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon}\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(-\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon}\sqrt{R^2-x^2}dx+\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon}\frac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dx\right)\\ &= -\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx+\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon}\frac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dx,\end{aligned}$$

de modo que

$$A(\Gamma)=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon}\frac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dx.$$

Por fim, a regra da cadeia, juntamente com o resultado do problema 4, página 229, fornece

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right)=\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

e, daí,

$$\begin{aligned}A(\Gamma) &= 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=\lim_{\epsilon\to 0+}R^2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right)\Big|_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon}\\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}R^2\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{R-\epsilon}{R}\right)-\operatorname{arcsen}\left(\frac{-R+\epsilon}{R}\right)\right)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}R^2\left(\operatorname{arcsen}\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right)-\operatorname{arcsen}\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right)\right)\\ &= R^2(\operatorname{arcsen}1-\operatorname{arcsen}(-1))=\pi R^2,\end{aligned}$$

onde utilizamos a continuidade da função arcsen na penúltima igualdade acima. ■

Problemas – Seção 6.4

1. Para $n\in\mathbb{N}$, seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função dada por $f(x)=x^n$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Para $b>0$, use o corolário 6.55 para calcular a área sob o gráfico de $f_{|[0,b]}$.

Para o problema a seguir, dado $x>0$ definimos $x^x=e^{x\log x}$.

2. * Em cada um dos itens a seguir, verifique que a fórmula dada para a derivada da função correspondente está correta:
   (a) Se $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ é tal que $f(x)=x^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$, então $f'(x)=(1+\log x)x^x$.
   (b) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é tal que $f(x)=a^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$, onde $a>0$ é um real dado, então $f'(x)=a^x\log a$.
   (c) Se $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ é tal que $f(x)=x^\alpha$ para todo $x>0$, onde $\alpha>0$ é um real dado, então $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

3. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to (0, +\infty)$ é uma função derivável, calcule as derivadas de cada uma das funções abaixo:

   (a) $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \log f(x)$, para todo $x \in I$.

   (b) $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x)^r$, para todo $x \in I$, onde $r \neq 0$ é um número racional.

4. Para $n \geq 1$ inteiro, prove que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) > f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Para o próximo problema o leitor pode achar útil recordar o enunciado do problema 6.3.10 do volume 2.

6. Generalize a fórmula para a área de um círculo, provando que a área de uma elipse de eixo maior $2a$ e eixo menor $2b$ é igual a πab.

7. (Croácia.) Prove que não existe uma função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = \log x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Decida qual dos números e^π e π^e é o maior.

9. Encontre todos os $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a \neq b$ e $a^b = b^a$.

10. Prove o **teorema do valor médio para integrais**: dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c).$$

11. (Romênia.) Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das funções contínuas $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ tais que

$$\int_0^\pi f(x)\,\text{sen}\, x dx = \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 1.$$

Calcule $\inf_{f\in\mathcal{F}} \int_0^\pi f(x)^2 dx$.

12. (Romênia.)

    (a) Mostre que $\log(x + 1) \leq x$, para todo $x \geq 0$.

    (b) Dado $a > 0$, mostre que $\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{x^n+a}dx = \log\left(\frac{a+1}{a}\right)$.

13. * O objetivo deste problema é utilizar o material desenvolvido nesta seção para estabelecer a irracionalidade de π. Para tanto, faça os seguintes itens:

    (a) Mostre que é suficiente estabelecer a irracionalidade de π^2.

    (b) Fixado $n \in \mathbb{N}$, seja $f(x) = \frac{1}{n!}x^n(1 - x)^n$. Prove que:

       i. A função f é da forma $f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} a_k x^k$, com $a_k \in \mathbb{Z}$ para $n \leq k \leq 2n$.

       ii. Se $0 < x < 1$, então $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.

       iii. Para todo $k \geq 1$, as k−ésimas derivadas $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}(1)$ de f nos pontos 0 e 1 são números inteiros.

    (c) Suponha que $\pi^2 = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$. Se

$$g(x) = b^n(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \cdots),$$

    mostre que

$$\frac{d}{dx}(g'(x)\text{sen}\,(\pi x) - \pi g(x)\cos(\pi x)) = \pi^2 a^n f(x)\text{sen}\,(\pi x).$$

    (d) Conclua, a partir do item anterior, que

$$0 < \pi a^n \int_0^1 f(x)\text{sen}\,(\pi x)dx = g(0) + g(1) \in \mathbb{Z}.$$

    (e) Por fim, obtenha uma contradição mostrando que, se n for escolhido inicialmente de forma tal que $\pi a^n < n!$, então

$$0 < \pi a^n \int_0^1 f(x)\text{sen}\,(\pi x)dx < 1.$$

6.5 A segunda variação de uma função

Começamos esta seção mostrando que a concavidade ou convexidade de uma função duas vezes derivável está intimamente relacionada ao sinal de sua segunda derivada. Em seguida, utilizamos tal relação para, em conjunção com a desigualdade de Jensen, obter mais algumas desigualdades interessantes.

Teorema 6.57. Se I for um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ for duas vezes derivável em I, então:

(a) f é convexa em I se, e só se, $f'' \geq 0$ em I.

(b) Se $f'' > 0$ em I, então f é estritamente convexa em I.

(c) f é côncava em I se, e só se, $f'' \leq 0$ em I.

(d) Se $f'' < 0$ em I, então f é estritamente côncava em I.

Prova. Façamos a prova dos itens (a) e (b), sendo a prova dos demais itens totalmente análoga.

Suponha, inicialmente, que f é convexa. Então, dados $x < y$ em I e $0 < t < 1$, temos

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Fazendo $u = (1-t)x + ty$, segue da desigualdade acima que

$$\frac{f(y) - f(u)}{y - u} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(u) - f(x)}{u - x}. \tag{6.26}$$

Por outro lado, como $u \to x$ se, e somente se, $t \to 0$, concluímos, a partir da segunda desigualdade acima, que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \lim_{t \to 0} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = f'(x).$$

Analogamente, como $u \to y$ se, e somente se, $t \to 1$, obtemos a partir da primeira desigualdade em (6.26) que

$$f'(y) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Portanto $f'(y) \geq f'(x)$, i.e., a função f' é não decrescente em I, de sorte que a proposição 6.43 garante que $f'' \geq 0$ em I.

Reciprocamente, suponha agora que $f'' \geq 0$ (resp. $f'' > 0$) em I, ou seja, que a função f' é não decrescente (resp. crescente) em I. Tome $x < y$ em I, $0 < t < 1$ e seja $u = (1-t)x + ty$. Pelo TVM, existem $r, s \in I$ tais que $x < r < u < s < y$ e

$$f'(r) = \frac{f(u) - f(x)}{u - x}, \quad f'(s) = \frac{f(y) - f(u)}{y - u}.$$

Mas, como $f'(r) \leq f'(s)$ (resp. $f'(r) < f'(s)$), temos que

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \text{ (resp. } <) \ \frac{f(y) - f(u)}{y - u}$$

ou, ainda, que

$$\frac{f(u) - f(x)}{t(y - x)} \leq \text{ (resp. } <) \ \frac{f(y) - f(u)}{(1-t)(y - x)}.$$

Mas isso é o mesmo que

$$f((1-t)x + ty) \leq \text{ (resp. } <) \ (1-t)f(x) + tf(y),$$

de modo que f é convexa (resp. estritamente convexa). ■

O teorema anterior é conhecido como o estudo da **segunda variação** de uma função duas vezes derivável. A seguir, obtemos uma consequência geométrica importante de tal teorema, para a qual precisamos, inicialmente, de uma definição.

Definição 6.58. Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Um ponto $x_0 \in I$ é denominado um **ponto de inflexão** de f se existir $\delta > 0$ tal que f é convexa (resp. côncava) em $I \cap (x_0 - \delta, x_0)$ e côncava (resp. convexa) em $I \cap (x_0, x_0 + \delta)$.

Podemos agora enunciar e provar o corolário desejado.

Corolário 6.59. Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável. Se $x_0 \in I$ é um ponto de inflexão de f, então $f''(x_0) = 0$.

Prova. Suponha que f é convexa em $(x_0 - \delta, x_0)$ e côncava em $(x_0, x_0 + \delta)$, com $\delta > 0$ escolhido tão pequeno que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ (o outro caso pode ser tratado de forma análoga). Então, pelo teorema anterior, temos $f''(x) \geq 0$ em $(x_0 - \delta, x_0)$ e $f''(x) \leq 0$ em $(x_0, x_0 + \delta)$. Se $f''(x_0) < 0$, podemos escolher $a \in (x_0 - \delta, x_0)$ tal que $f''(a) \geq 0$. Aplicando agora o teorema de Darboux (cf. problema 15, página 241), concluímos pela existência de $b \in (a, x_0)$ (logo $b \in (x_0 - \delta, x_0)$) tal que $f''(b) < 0$, o que é uma contradição. Se $f''(x_0) > 0$, chegamos a uma contradição de modo análogo. Logo, $f''(x_0) = 0$. ■

Os resultados discutidos ao longo deste capítulo permitem esboçar gráficos de funções duas vezes deriváveis com razoável precisão. Vejamos como fazer isto no exemplo a seguir.

Exemplo 6.60. Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 8e^x}}.$$

Solução. Primeiramente, veja que $0 < f(x) < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ademais, como $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, temos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

Segue que o gráfico de f está inteiramente contido na faixa do plano Cartesiano delimitada pelas retas $y = 0$ e $y = 1$, e que tal gráfico se aproxima tanto quanto queiramos de tais retas à medida que $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, respectivamente. Por outro lado, como $f(0) = \frac{1}{3}$, segue que o gráfico de f intersecta o eixo das ordenadas no ponto $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Para analisarmos a primeira variação de f, note que um cálculo imediato com o auxílio da regra da cadeia fornece

$$f'(x) = -\frac{4e^x}{(1 + 8e^x)^{3/2}} < 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de sorte que f é decrescente em toda a reta. Por fim, quanto à segunda variação de f, calculando f'' (novamente com o auxílio da regra da cadeia) obtemos

$$f''(x) = -\frac{4e^x}{(1 + 8e^x)^{5/2}}(1 - 4e^x).$$

Então, o sinal de f'' coincide com o sinal de $4e^x - 1$, de sorte que (cf. teorema 6.57) f é estritamente convexa para $x > -2\log 2$, estritamente côncava para $x < -2\log 2$ e o ponto $x_0 = -2\log 2$ é seu único ponto de inflexão. Por fim, $-2\log 2 \approx -1,38$ e $f(-2\log 2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$.

Reunindo as informações acima, obtemos o esboço para o gráfico de f constante da figura 6.7

■

Terminamos esta seção ilustrando o uso da desigualdade de Jensen em conjunção com o teorema 6.57.

Exemplo 6.61 (IMO). Prove que, para todos os reais positivos a, b, c, temos

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + ab}} \geq 1.$$

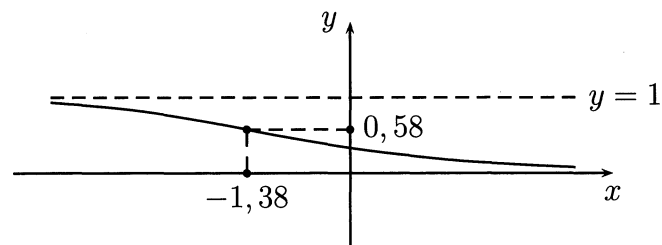



Figura 6.7: gráfico da função $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+8e^x}}$.

Prova. Note, primeiramente, que a expressão do primeiro membro na desigualdade do enunciado é igual a

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\frac{bc}{a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8\frac{ac}{b^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8\frac{ab}{c^2}}}.$$

Fazendo $\frac{bc}{a^2}=e^x$, $\frac{ac}{b^2}=e^y$ e $\frac{ab}{c^2}=e^z$, temos $x+y+z=0$ e queremos provar que

$$f(x)+f(y)+f(z)\geq 1,$$

onde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é a função cujo gráfico foi analisado no exemplo anterior. Há, pois, três possibilidades:

(i) $x,y,z>-2\log 2$: pela desigualdade de Jensen, temos

$$f(x)+f(y)+f(z)\geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f(0)=1.$$

(ii) $x,y\leq -2\log 2<z$: então

$$f(x)+f(y)+f(z)\geq f(x)+f(y)\geq 2f(-2\log 2)=\frac{2}{\sqrt{3}}>1.$$

(iii) $x\leq -2\log 2<y,z$: novamente pela desigualdade de Jensen, temos

$$f(x)+f(y)+f(z)\geq f(x)+2f\left(\frac{y+z}{2}\right)=f(x)+2f\left(-\frac{x}{2}\right).$$

Se $g:(-\infty,-2\log 2]\to\mathbb{R}$ é a função dada por

$$g(x)=f(x)+2f\left(-\frac{x}{2}\right),$$

note inicialmente que

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)+2\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

e

$$g(-2\log 2)=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{17}}>1.$$

Por outro lado, temos

$$g'(x)=f'(x)-f'\left(-\frac{x}{2}\right)=-\frac{4e^x}{(1+8e^x)^{3/2}}+\frac{4e^{-x/2}}{(1+8e^{-x/2})^{3/2}},$$

de sorte que $g'(x)<0$ se, e só se, $-2\log 7<x<-2\log 2$. Portanto,

$$x\in(-\infty,-2\log 7]\Rightarrow g(x)>1$$

e

$$x\in(-2\log 7,-2\log 2)\Rightarrow g(x)>g(-2\log 2)>1.$$

■

A discussão subsequente fornece uma ampla generalização da desigualdade entre as médias, conhecida como a desigualdade entre as *médias de potências*. Para tanto, precisamos, inicialmente, definir o que vêm a ser tais médias.

Definição 6.62. Dados reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos a **média de potências** de ordem α dos números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como o número $M_\alpha = M_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ tal que

$$M_\alpha = \begin{cases} \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}, & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}.$$

Teorema 6.63. Sejam dados reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Se $\alpha < \beta$ são reais quaisquer, então

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{a_i\} \leq M_\alpha \leq M_\beta \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}, \tag{6.27}$$

ocorrendo a igualdade em uma qualquer das desigualdades acima se, e só se, todos os a_i forem iguais.

Prova. Podemos supor, sem perda de generalidade, que nem todos os a_i's são iguais. Suponha, ainda, que (6.27) valha (com desigualdades estritas) para todos $0 < \alpha < \beta$.

Dados $x < y < 0$, temos $-x > -y > 0$; como os números $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ também são positivos e nem todos iguais, segue de nossas hipóteses que

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{1}{a_i}\right\} < M_{-y}\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) < M_{-x}\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) < \max_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{1}{a_i}\right\}.$$

Agora, um cálculo fácil fornece

$$M_{-t}\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) = M_t(a_1, \ldots, a_n)^{-1},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, de sorte que as desigualdades acima fornecem

$$\left(\max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}\right)^{-1} < M_y(a_1, \ldots, a_n)^{-1} < M_x(a_1, \ldots, a_n)^{-1} < \left(\min_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}\right)^{-1}$$

ou, ainda,

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{a_i\} < M_x(a_1, \ldots, a_n) < M_y(a_1, \ldots, a_n) < \max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}.$$

Portanto, concluímos que é suficiente analisar os casos $0 < \alpha < \beta$ e $0 = \alpha < \beta$.

Sem perda de generalidade, suponha que $a_1 = \max_{1 \leq i \leq n}\{a_i\}$. Então, como nem todos os a_i's são iguais, temos

$$\begin{aligned} M_\beta(a_1, \ldots, a_n) &= \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta} \\ &< \left(\frac{n a_1^\beta}{n}\right)^{1/\beta} = a_1 = \max_{1 \leq i \leq n}\{a_i\} \end{aligned}$$

e, analogamente, $\min_{1 \leq i \leq n}\{a_i\} < M_\alpha$. Resta, pois, mostrarmos que

$$0 < \alpha < \beta \Rightarrow M_0 < M_\alpha < M_\beta.$$

A primeira desigualdade acima equivale a

$$\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} > \sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \ldots a_n^\alpha},$$

que, por sua vez, é uma decorrência imediata da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Para provarmos a segunda desigualdade, fazendo $M_\beta = K$, basta mostrarmos que

$$\frac{1}{K}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} < 1$$

ou, ainda, que

$$\left(\frac{(a_1/K)^\alpha + (a_2/K)^\alpha + \cdots + (a_n/K)^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} < 1.$$

Denotando $b_i = (a_i/K)^\beta$, temos que os b_i's não são todos iguais e satisfazem

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = \frac{1}{K^\beta}\left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right) = 1;$$

ademais, uma vez que $(a_i/K)^\alpha = b_i^{\alpha/\beta}$, queremos mostrar que

$$\left(\frac{b_1^{\alpha/\beta} + b_2^{\alpha/\beta} + \cdots + b_n^{\alpha/\beta}}{n}\right)^{1/\alpha} < 1. \tag{6.28}$$

Para o que falta, consideremos a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{\alpha/\beta}$. Uma vez que $0 < \alpha/\beta < 1$, temos

$$f''(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)x^{\alpha/\beta - 2} < 0,$$

de sorte que f é estritamente côncava pelo teorema 6.57. Segue então da desigualdade de Jensen que

$$\frac{f(b_1) + \cdots + f(b_n)}{n} < f\left(\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}\right) = f(1) = 1,$$

desigualdade que é exatamente (6.28). ■

Fixados $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, vale notar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(\alpha) = M_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$, é contínua. De fato, a expressão de f é, para $\alpha \neq 0$, claramente a de uma função contínua. Assim, resta mostrar que

$$\lim_{\alpha \to 0} f(\alpha) = f(0).$$

Para tanto, a continuidade das funções $x \mapsto e^x$ e $x \mapsto \log x$ garante que basta mostrarmos que

$$\lim_{\alpha \to 0} \log f(\alpha) = \log f(0)$$

ou, ainda,

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right) = \frac{\log(a_1 a_2 \cdots a_n)}{n}.$$

Mas, uma vez que

$$\lim_{\alpha \to 0} \log\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right) = \log 1 = 0,$$

aplicando a regra de l'Hôspital (cf. problema 6, página 229) ao primeiro membro acima, juntamente com o resultado do item (c) do problema 2, página 251, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right) &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{d}{d\alpha} \log\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right) \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{(\log a_1)a_1^\alpha + \cdots + (\log a_n)a_n^\alpha}{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha} \\
&= \frac{\log a_1 + \cdots + \log a_n}{n} \\
&= \frac{\log(a_1 a_2 \ldots a_n)}{n}.
\end{aligned}$$

Problemas – Seção 6.5

1. Em cada um dos itens a seguir, esboce o gráfico da função dada, explicitando assíntotas, intervalos de monotonicidade, intervalos de convexidade ou concavidade e pontos de inflexão:

   (a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$.

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, para $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$, para $x \neq -1$.

   (d) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x \log x$, para $x > 0$.

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

2. Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

3. Sejam x, y, z reais positivos com soma dos quadrados igual a 8. Prove que a soma de seus cubos é maior ou igual que $16\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais não negativos e com soma igual a $\frac{1}{2}$. Mostre que

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1 - x_j}{1 + x_j} \leq \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n.$$

5. (Estados Unidos.) Dados reais positivos a, b e c, prove que

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c},$$

com igualdade se, e só se, $a = b = c$.

6. Sejam $0 < x_1, x_2, x_3, x_4 < \pi$ números reais tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\pi$. Prove que

$$\prod_{i=1}^{4} \frac{\operatorname{sen} x_i}{x_i} \leq \frac{16}{\pi^4}.$$

7. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais maiores ou iguais a 1. Prove que

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + 1}.$$

8. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais pertencentes ao intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e tais que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$. Prove que

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n [1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)]}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

CAPÍTULO 7

Soluções e Sugestões

Seção 1.1

2. Comece fazendo $x = 1$ e $y = \sqrt{2}$ na relação dada para calcular $f(1 + \sqrt{2})$.

7. Se a_n é o $n-$ésimo natural que não é quadrado perfeito, então existem inteiros positivos s e t, tais que $1 \leq s \leq 2t$ e $a_n = t^2 + s$ (t^2 é o maior quadrado perfeito menor ou igual a a_n). Como há exatamente a_n números inteiros de 1 a a_n, exatamente t dos quais são quadrados perfeitos (os números $1^2, 2^2, \ldots, t^2$), temos que a_n é o $(a_n - t)-$ésimo não quadrado perfeito. Então, $n = a_n - t = t^2 + s - t$, de sorte que

$$t = \sqrt{n - s + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Agora, como $s > 0$, temos

$$a_n = t^2 + s = n + t = n + \sqrt{n - s + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} < n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, utilizando o fato de que $s \leq 2t$, obtemos, como acima, $a_n > n + \sqrt{n} - \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\left(n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right) - 1 < a_n < n + \sqrt{n} + \frac{1}{2},$$

de sorte que $a_n = \lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \rfloor$.

8. Para (b), use (a); para (c), considere inicialmente o caso $k \in \mathbb{N}$, via indução; por fim, aplique o resultado de (c) para obter (d) e os resultados de (c) e (d) para obter (e).

9. Use a fórmula para o termo geral de uma PA e o item (c) do problema anterior.

10. Como $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a proposição 1.14 do volume 1 garante a existência de $L = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}$. Suponha que $\sup\{|g(x)|; x \in \mathbb{R}\} > 1$ e aplique a desigualdade triangular à relação do enunciado para chegar a uma contradição.

Seção 1.2

3. Observe inicialmente que, pelo exemplo 7.4 do volume 1, temos $x + \frac{1}{x} \geq 2$, para todo $x > 0$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $x = 1$.

7. Use a forma canônica de f.

8. Use novamente a forma canônica de f.

9. Se um retângulo de perímetro $2p$ tem dimensões x e y, então $x+y = p$. A partir daí, mostre que sua área depende de x de acordo com a função quadrática $f(x) = -x^2 + px$ e aplique o resultado da proposição 1.25.

10. Sendo l a largura e h a altura do caminhão (medidas em metros), é imediato que o volume de carga que o mesmo pode transportar é igual a $18lh\text{m}^3$; portanto, temos de maximizar o produto lh. A fim de que o caminhão possa entrar no túnel, sua seção reta (um retângulo de lados medindo l e h) deve ter diagonais de comprimento d, com $d \leq 5m$; mas, como $d = \sqrt{l^2 + h^2}$, temos então que

$$lh = l\sqrt{d^2 - l^2} \leq l\sqrt{25 - l^2} = \sqrt{25l^2 - l^4}.$$

Pondo $x = l^2$, concluímos que basta maximizar a função $f(x) = 25x - x^2$, com $0 < x < 5$.

11. Mostre, inicialmente, que devemos procurar o menor real positivo a tal que $f(x) \leq a$, para todo $x \in \mathbb{R}$; equivalentemente, isso é o mesmo que procurar o menor real positivo a tal que $ax^2 - 5x + (a+1) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

12. Considere separadamente os casos n par e n ímpar, utilizando em ambos a desigualdade triangular.

13. Para o item (a), aplique a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ao denominador da expressão que define a função. Para o item (b), escreva $f(x) = 2 + \frac{5x}{x^2+1}$ e, em seguida, proceda como em (a). Por fim, para o item (c), obseve que $f(x)^3 = x^3(1-x^3)^3$ e, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, que

$$\begin{aligned} x^3(1-x^3)^3 &= \frac{1}{3} \cdot 3x^3(1-x^3)^3 \\ &\leq \frac{1}{3}\left(\frac{3x^3 + (1-x^3) + (1-x^3) + (1-x^3)}{4}\right)^4. \end{aligned}$$

14. Para o item (b), escreva $\frac{(x+10)(x+2)}{x+1} = \frac{((x+1)+9)((x+1)+1)}{x+1} = (x+1) + \frac{9}{x+1} + 10$; para o item (c), escreva $\frac{a}{x} = \frac{a}{2x} + \frac{a}{2x}$; para (d), escreva $x^3 = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2}$ no denominador.

15. Comece escrevendo $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 \leq (2+xy)^2 - 2(xy)^2$, e veja essa última expressão como uma função de segundo grau em $z = xy$.

16. Comece escrevendo $f(x) = 4\left(x + 1 + \frac{1}{x+1}\right) + (k + 8)$. Em seguida, aplique os resultados dos problemas 3 e 5.

17. Comece provando que a função $f(x) = x^3 + 2x$ é crescente. Em seguida, observe que as equações do sistema podem ser escritas da forma $y = f(x)$, $z = f(y)$, $t = f(z)$ e $x = f(t)$, suponha $x \geq y$ e conclua, a partir do caráter crescente de f, que $x \geq y \geq z \geq t \geq x$.

18. Fixados m, n naturais, seja

$$I_k = [(kmn + 1)n, (kmn + 1)m].$$

Como $((k + 1)mn + 1)n < (kmn + 1)m$ para $k > \frac{mn^2+n-m}{mn(m-n)}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup_{k \geq k_0} I_k = [(k_0mn + 1)n, +\infty).$$

Como f tem infinitos pontos de estrangulamento, existem $k \geq k_0$ e p naturais tais que p é ponto de estrangulamento e $p \in I_k$. Então,

$$f((kmn + 1)n) < f(p) < f((kmn + 1)m).$$

Mas, $kmn + 1$ é relativamente primo com m e com n, de modo que

$$f(kmn + 1) + f(n) < f(kmn + 1) + f(m)$$

e, daí, $f(n) < f(m)$.

Seção 1.3

8. Faça $x = \frac{u}{v}$ nas relações acima.

10. Comece supondo que $f = g + h$, onde $g, h : I \to \mathbb{R}$ são tais que g é par e h é ímpar. Em seguida, use as definições de função par e ímpar para escrever $g(x)$ e $h(x)$ em função de $f(x)$ e de $f(-x)$.

11. Inicialmente, mostre que $f(1) = 0$. Em seguida, faça $a = 1$ e $b = -1$ para calcular $f(-1)$. Por fim, faça $b = -a$.

13. Tome $f(x) = -g(x)$ para $x \leq 0$ e $f(x) = -x$ para $x \geq 0$.

14. A fim de mostrar que f é ímpar, observe que $f(20+x) = f(10+(10+x)) = f(10 - (10 + x)) = f(-x)$ e, analogamente, $f(20 - x) = f(x)$. Para a segunda parte, calcule $f(40 + x)$ em termos de $f(x)$.

15. Para o item (a), comece mostrando que todo $x \in \mathbb{R}$ pode ser escrito da forma $x = pq + \alpha$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in [0, p)$.

16. Fazendo $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}$, mostre que $g(x + a) = \sqrt{\frac{1}{4} - g(x)^2}$ e, daí, que $g(x + 2a) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

17. Seja $X = \{x \in \mathbb{Z};\ x > 100\}$. Temos $\text{Im}(f) = f(X) \cup f(\mathbb{Z} \setminus X)$. Por um lado, $f(X) = \{y \in \mathbb{Z};\ y > 90\}$. Agora, se $90 \leq x \leq 100$, temos $101 \leq x + 11 \leq 111$ e $f(x) = f(f(x + 11)) = f(x + 1)$. Logo,

$$f(90) = f(91) = \cdots = f(100) = f(f(111)) = f(101) = 91.$$

Vamos mostrar, por indução, que $f(90-x) = 91$ para todo inteiro $x \geq 1$. Para $x = 1$, temos $f(89) = f(f(100)) = f(91) = 91$. Admitindo, por hipótese de indução, que $f(90 - x) = 91$ para todo $x < n$, temos, para $x = n$, que

$$f(90 - n) = f(f(101 - n)) = f(91) = 91,$$

uma vez que $101 - n \leq 100$, o que completa a indução. Logo, $f(x) = 91$ para todo inteiro $x \leq 100$, de modo que

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{Z};\ y > 90\} \cup \{91\} = \{91, 92, 93, \ldots\}.$$

18. De $f(f(n)) = 4n + 1$, obtemos, aplicando o item (c) duas vezes, que

$$f(4n + 1) = f(f(f(n))) = 4f(n) + 1.$$

Por outro lado, é fácil provar por indução, com o auxílio dos itens (a) e (b), que $f(2^k) = 2^{k+1} - 1$. Consequentemente, novamente pelo item (c), obtemos

$$f(2^{k+1} - 1) = f(f(2^k)) = 4 \cdot 2^k + 1.$$

Dessa forma, como $1993 = 4\cdot448+1$, segue que $f(1993) = 4f(448)+1$, $f(448) = 2f(224)+1$, $f(224) = 2f(112)+1$, $f(112) = 2f(61)+1$, $f(61) = 4f(15)+1$. Por outro lado, $f(15) = f(2^4-1) = 4\cdot2^3+1 = 33$, de maneira que, substituindo esse valor nas relações acima, obtemos $f(1993) = 4285$.

19. Encontre uma partição de $\mathbb{N}$ da forma $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$, com A_n infinito, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em seguida, defina f pondo $f(x) = n$, para todo $x \in A_n$.

20. Suponha que exista uma tal função. Sejam $k > 1$ inteiro e $x_j = \frac{j}{k}$, para $0 \leq j \leq k$. Dado um real $x \in [x_j, x_{j+1}]$, temos

$$d(f(x), f(x_j)) \leq c|x - x_j|^{\alpha+1/2} \leq \frac{c}{k^{\alpha+1/2}}.$$

Portanto, sendo C_j o círculo do plano com centro $f(x_j)$ e raio $\frac{c}{k^{\alpha+1/2}}$, segue que

$$x \in [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow f(x) \in C_j.$$

Então

$$Q = f([0,1]) \subset C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_{k-1},$$

o que implica ($A(F)$ denota a área da figura F)

$$\begin{aligned} 1 &= A(Q) = A\left(\cup_{j=0}^{k-1} C_j\right) \leq \sum_{j=0}^{k-1} A(C_j) \\ &= k\pi\left(\frac{c}{k^{\alpha+1/2}}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{k^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Mas, como $\alpha > 0$ e $k > 1$ é arbitrário, chegamos a uma contradição, uma vez que a relação $k^{2\alpha} \leq \pi c^2$ não é verdadeira para k suficientemente grande.

Seção 1.4

1. Para o item (a), use a proposição 1.39; para o item (b), use a proposição 1.34.

6. Mostre que, para $a, b \in \mathbb{R}$ fixados, o sistema de equações $x^3 = a$ e $x - f(y) = b$ admite a solução única $x = \sqrt[3]{a}$, $y = f^{-1}(\sqrt[3]{a} - b)$.

7. Inicialmente, mostre que basta provar que duas funções quaisquer em G comutam em relação à operação de composição de funções. Para tanto, use os itens (a) e (b), juntamente com o fato de que a única função $h \in G$ da forma $h(x) = x + a$, para algum $a \in \mathbb{R}$, é $h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

8. Se $g = f^{-1}$, comece mostrando que o que se pede equivale à existência de inteiros positivos $x < y < z$ em PA e tais que $g(x) < g(y) < g(z)$; em seguida, mostre que podemos supor que $x = 1$. Para o que falta, fixe $t \in \mathbb{R}$ e mostre que não podemos ter $g(t) > g(2t-1) > g(4t-3) > g(8t-7) > \cdots > g(1)$.

Seção 1.5

2. Observe inicialmente que $x = 4$ é uma solução dessa equação. Em seguida, veja ambos os membros da equação como funções de $(0, +\infty)$ em si mesmo e aplique o resultado do problema anterior.

3. Fazendo $g(x) = f(x) - f(0)$ na relação do enunciado, conclua que basta considerar o caso em que $f(0) = 0$. Sob tal suposição, faça $y = 0$ para obter $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Em seguida, use a relação do enunciado para concluir que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{Q}$, de sorte que $f(x) = f(1)x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$.

4. Use a relação do enunciado para provar por indução que $f(n) = f(1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$; em seguida, considere o caso $n < 0$.

5. Faça $x = y = z = 0$ para obter $f(0) = \frac{1}{2}$; em seguida, obtenha $f(1) = \frac{1}{2}$ de maneira análoga. Faça $y = z = 1$ para concluir que $f(x) \geq \frac{1}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por fim, utilize uma substituição análoga para concluir que $f(x) \leq \frac{1}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Em cada um dos intervalos $[n, n + f(n)]$ e $[f(n), 2f(n)]$ há $f(n) + 1$ naturais. Use, pois, o caráter crescente de f, juntamente com $f(n + f(n)) = 2f(n)$, para concluir que $f(n + k) = f(n) + k$, para todos $1 \leq k \leq f(n)$. Tome agora k, n naturais, com $n > k$. Use que $f(n) \geq n$ para mostrar que $f(n) > k$ e, pelo que fizemos acima, que $f(n) = n - 1 + f(1)$.

7. Faça $x = a = 0$ em (a) para concluir que $f(0) = 0$. Em seguida, fazendo $x = 0$ em (a), mostre que $f(a) = a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$. Tomando agora $x \in [0, 1)$, use que $f(x) \in \mathbb{Z}$ e $f(f(x)) = 0$ para concluir que $f(x) = 0$. Por fim, para $x \in \mathbb{R}$ qualquer, troque x por $\{x\}$ e faça $a = \lfloor x \rfloor$ em (a) para concluir que $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

8. Comece calculando $f(x + f(y + f(0)))$ de duas maneiras distintas para concluir que $f(0) = 0$. Em seguida, deduza, a partir daí, que $f(f(y)) = -y$, para todo $y \in \mathbb{Z}$, de sorte que f é bijetiva. A partir dessa última relação, calcule $f(f(f(x)))$ de duas maneiras distintas para concluir que f é ímpar. Troque x por $f(x)$ na relação do enunciado para concluir que $f(f(x) + f(y)) = f(f(x + y))$ e, daí, que $f(x) + f(y) = f(x + y)$, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$. Por fim, use indução para obter $f(x) = f(1)x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, chegando, assim, à contradição $-1 = f(f(1)) = f(1)f(1) \geq 0$.

9. Faça $k = 0$ para concluir que $f(1) = 2$; em seguida, use indução para mostrar que $f(n) = n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Use agora a relação do enunciado para mostrar que, se $f(-1) = a$, então não pode ser $a < 0$ nem $a > 0$. Por fim, faça uma nova indução para concluir que $f(-n) = -n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

10. Inicialmente, podemos supor que f não tem pontos fixos. Escreva $A = B \cup C$, onde B e C são conjuntos disjuntos e tais que $f(x) > x$, para todo $x \in B$, e $f(x) < x$, para todo $x \in C$. Se $|B| = l$ e a é o valor comum de $|f(x_j) - x_j|$, conclua que $0 = \sum_{j=1}^{k}(f(x_j) - x_j) = (2l - k)a$ e, a partir daí, que $a = 0$, o que é uma contradição.

11. Fazendo $x = y = 0$ na relação dada, obtemos $f(0) = 2f(0)f(a)$ e, daí, $f(a) = \frac{1}{2}$. Fazendo $y = 0$, obtemos $f(x) = f(a - x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que $f(-x) = f(a + x)$, também para todo $x \in \mathbb{R}$. Agora, substituindo $y = a$ na relação do enunciado e utilizando as relações deduzidas acima, segue que

$$f(-x) = f(x+a) = f(x)f(0) + f(a)f(a-x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) = f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, fazendo $y = -x$ na relação do enunciado e utilizando uma vez mais as relações acima, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= f(0) = f(x)f(a + x) + f(-x)f(a - x) \\ &= f(x)f(-x) + f(-x)f(x) = 2f(x)^2.\end{aligned}$$

Portanto, se mostrarmos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, seguirá da última relação acima que $f(x) = \frac{1}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Para o que falta, basta fazermos $y = x$ na relação do enunciado, obtendo

$$f(2x) = f(x)f(a - x) + f(x)f(a - x) = 2f(x)^2$$

e, daí, $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

12. Faça $x = y = 0$ para obter $f(0) = 1$. Em seguida, use indução para provar que $f(nx) = f(x)^n$, para todos $x \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$; mostre, a partir daí, que $f(x) = f(1)^x$, para todo $x \in \mathbb{Q}_+^*$. Fazendo agora $y = -x$, mostre que $f(-x) = f(x)^{-1}$; conclua então que $f(x) = f(1)^x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Por fim, use o fato de o contradomínio de f ser o conjunto dos racionais positivos para concluir que $f(1) = 1$.

13. Fazendo $x + y = a$ e $x - y = b$, mostre que $f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, para todos $a, b \in [0, 1]$. Fazendo $x = y$, mostre que $f(2x) = 2f(x)$, para todo $x \in [0, 1]$, e conclua que $f(a) + f(b) = f(a + b)$, para

todos $a, b \in [0,1]$. Mostre, a partir daí, que $f(x) = x$, para todo $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Para o que falta, imite a passagem de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ do exemplo 1.52.

14. Para o item (a), comece fazendo $m = 0$ na relação do enunciado para obter $f(f(n)) = f(0)^2 + n$; conclua, então, que f é bijetiva. Em seguida, tome $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(k) = 0$ e seja $l = f(0)$; então, temos $l = f(0) = f(f(k)) = f(0)^2 + k = l^2 + k$, ao passo que, fazendo $m = k$ e $n = 0$ na relação do enunciado, temos $k^2 + l = k$. Logo, $k = l = 0$. Quanto a (b), faça $m = 1$ e $n = 0$ na relação do enunciado para obter $f(1) = 1$; em seguida, deduza que $f(f(n)+1) = n+1$ e, a partir daí, que $f(n) = n$, para todo inteiro não negativo n. Por fim, estenda o argumento aos inteiros negativos, mostrando que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

15. Fazendo $x = y = 1$, conclua que $f(1) = 1$. Em seguida, mostre que $f(f(xy)) = x^2y^2f(xy) = f(f(x)f(y))$, obtendo então que $f(xy) = f(x)f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{N}$; conclua, a partir daí, que $f(x^2) = f(x)^2$, para todo $x \in \mathbb{N}$. Por fim, se $f(x) < x^2$ para um certo $x \in \mathbb{N}$, escreva $f(x)^3 = f(x^3) > f(xf(x)) = x^2f(x)^2$ para obter $f(x) > x^2$, uma contradição; analogamente, mostre que não pode ser $f(x) > x^2$, de sorte que $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

16. Troque x por $x - 2$ e y por 2 em (a) para concluir que $f(x) = 0$, para $x \geq 2$. Faça agora $x = y = 0$ em (a) para obter, a partir de (b), que $f(0) = 1$. Por fim, para $0 < x < 2$, troque y por $2 - x$ em (a) para concluir que $f(x) \geq \frac{2}{2-x}$; por outro lado, mostre que $f\left(x + \frac{2}{f(x)}\right) = f(2)f(x) = 0$ e conclua que $f(x) \leq \frac{2}{2-x}$, para cada um de tais x.

17. Observe inicialmente que, pelo item (b), f tem no máximo um ponto fixo em cada um dos intervalos $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$. Se existir um ponto fixo x_0 de f tal que $-1 < x_0 < 0$, faça $x = y = x_0$ em (a) para concluir que $x_0^2 + 2x_0$ também é ponto fixo de f e, daí, que $x_0^2 + 2x_0 = x_0$, o que é uma contradição. Argumente analogamente para concluir que f não tem pontos fixos em $(0, +\infty)$. Por fim, fazendo $x = y$ em (a), conclua que $f(x) = -\frac{x}{x+1}$ para todo $x \in S$.

18. Comece observando que, se uma tal f existir, então $f(F_k) = F_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $(F_n)_{n\geq 1}$ é a sequência de Fibonacci. Mostre então, com o auxílio do problema 5.29 do volume 1, que uma possibilidade para f é termos

$$f(F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_j}) = F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + \cdots + F_{i_j+1},$$

para todos $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j$ naturais.

19. Se f é uma tal função, faça $y = 0$ na relação do enunciado para obter $f(z) = (c+1)z$, para todo $z \in \operatorname{Im}(f)$, onde $c = f(0)$; deduza, a partir daí, que $cf(x+y) = f(x)f(y) - xy$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $c = 0$, suponha que $c \neq 0$ e conclua que $0 \notin \operatorname{Im}(f)$; faça, agora, $x = c$ e $y = -c$ na última relação acima, obtendo $f(c)f(-c) = 0$ e chegando, assim, a uma contradição. Obtivemos que $f(x)f(y) = xy$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$; para terminar, tome $y_0 \in \operatorname{Im}(f)$ tal que $f(y_0) \neq 0$; então, $f(y_0) = (c+1)y_0 = y_0$ e, daí, $f(x)y_0 = xy_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

20. Observe que, por (a), temos $f(x+k) = f(x) + k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Tome, agora, $m, n \in \mathbb{N}$ e use o fato de que $\frac{(n^2+m)^3 - n^3}{n^3} \in \mathbb{N}$ para calcular

$$f\left(\frac{m^3}{n^3} + \frac{(n^3+m)^3 - n^3}{n^3}\right)$$

de duas maneiras distintas, obtendo a equação

$$(a + n^2)^3 = a^3 + (n^6 + 3n^3m + 3m^2),$$

onde $a = f\left(\frac{m}{n}\right)$. Conclua, a partir daí, que $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}_+^*$.

Seção 2.1

3. Como a bissetriz dos quadrantes ímpares do plano Cartesiano é o conjunto dos pontos (x, y) do mesmo tais que $x = y$, concluímos que

$$x_0 \in I \text{ é ponto fixo de } f \Longleftrightarrow f(x_0) = x_0 \Longleftrightarrow (x_0, x_0) \in G_f.$$

Portanto, os pontos fixos de f são exatamente as abscissas dos pontos onde o gráfico de f intersecta a bissetriz dos quadrantes ímpares do plano Cartesiano. Na figura 7.1, supondo que f é crescente para $x < x_1$ e decrescente para $x > x_3$, temos que os pontos fixos de f são x_1, x_2 e x_3, os quais são as abscissas dos pontos A, B e C, respectivamente.

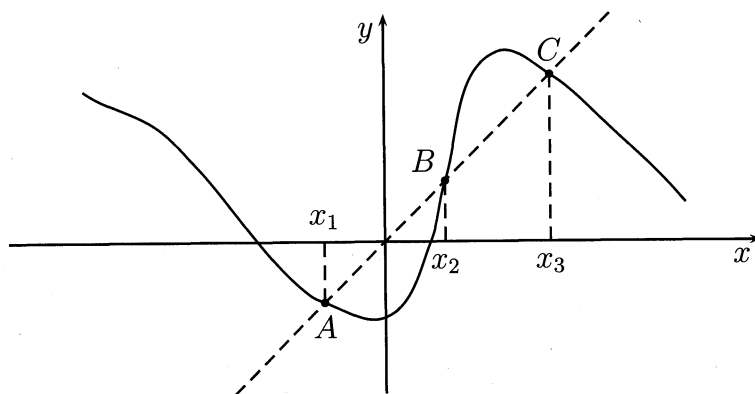



Figura 7.1: pontos fixos de uma função f.

4. Resolva, para $x \in I$, a equação $f(x) = g(x)$.

6. As funções f_2 e f_4 são sempre não negativas e só se anulam em $x = 0$. Também, é claro que são funções pares, de forma que seus gráficos são simétricos em relação ao eixo vertical do sistema Cartesiano. Por outro lado, à medida que $|x|$ aumenta, é evidente que os valores de

f_2 e f_4 se tornam cada vez maiores e, eventualmente, ultrapassam qualquer valor predefinido. Por último,

$$|x| < 1 \Rightarrow x^4 < x^2, \quad |x| > 1 \Rightarrow x^4 > x^2 \quad \text{e} \quad |x| = 1 \Rightarrow x^4 = x^2 = 1,$$

justificando o fato de o gráfico de f_4 estar situado abaixo do gráfico de f_2 no intervalo $(-1, 1)$ e acima fora do intervalo $[-1, 1]$ (veja a figura 7.2).

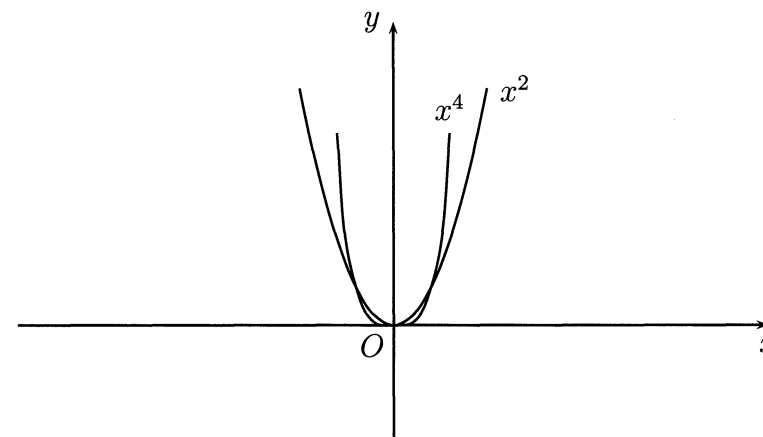



Figura 7.2: gráficos de f_2 e f_4.

As funções f_3 e f_5 são positivas para $x > 0$, negativas para $x < 0$ e se anulam em $x = 0$. Também, é claro que se trata de funções ímpares e, daí, seus gráficos são simétricos em relação à origem do sistema Cartesiano. Agora, à medida que $|x|$ aumenta é evidente que os valores de $|f|$ e $|g|$ se tornam cada vez maiores e, eventualmente, ultrapassam qualquer valor prefixado. Por último,

$$|x| < 1 \Rightarrow |x^5| < |x^3|, \quad |x| > 1 \Rightarrow |x^5| > |x^3| \quad \text{e} \quad |x| = 1 \Rightarrow |x^5| = |x^3|,$$

justificando o fato de o gráfico de f_5 estar, no intervalo $(-1, 1)$, mais próximo do eixo horizontal que o gráfico de f_3 e mais distante de tal eixo fora do intervalo $[-1, 1]$ (veja a figura 7.3).

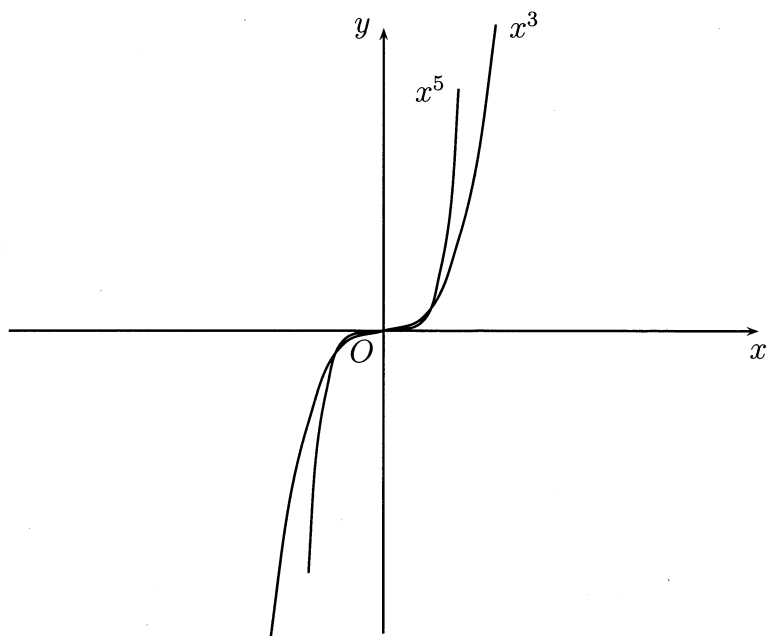



Figura 7.3: gráficos de f_3 e f_5.

7. Observe que f é a inversa da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em seguida, aplique o resultado da proposição 2.6.

9. A figura 4.1 esboça o gráfico da função parte fracionária.

10. Para o item (a), basta mostrarmos que (x, y) é um ponto do gráfico de f se, e só se, $(x - a, y)$ é um ponto do gráfico de g. De fato, se (x, y) pertence ao gráfico de f, então $f(x) = y$ e, daí, $g(x - a) = f((x - a) + a) = y$, quer dizer, $(x - a, y)$ pertence ao gráfico de g; provamos a recíproca do mesmo modo. Para o item (b), basta mostrarmos que (x, y) é um ponto do gráfico de f se, e só se, $(x, y+a)$ é um ponto do gráfico de g. De fato, se (x, y) pertence ao gráfico de f, então $f(x) = y$ e, daí, $g(x) = f(x)+a = y+a$, quer dizer, $(x, y+a)$ pertence ao gráfico de g; provamos a recíproca do mesmo modo. Os

demais itens podem ser analisados de forma similar.

11. De posse do gráfico de f, mostre que obtemos o gráfico de g do seguinte modo: *refletimos*, ao longo do eixo das abscissas, a porção do gráfico de f situada abaixo de tal reta.

12. Em princípio, pode parecer que não podemos usar o resultado do problema anterior, haja vista que a função em questão não tem por domínio o conjunto dos reais. Contudo, como

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{2x+2-2}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1},$$

podemos raciocinar de modo análogo, esboçando o gráfico de f do seguinte modo: primeiro, traçamos o gráfico de $x \mapsto \frac{1}{x}$; em seguida, transladamos o gráfico anterior uma unidade para a esquerda, obtendo o gráfico de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$; agora, alongamos o gráfico anterior na direção vertical, pelo fator 2, obtendo o gráfico de $x \mapsto \frac{2}{x+1}$; refletimos o resultado no eixo horizontal, obtendo $x \mapsto -\frac{2}{x+1}$; por fim, transladamos o gráfico refletido duas unidades para cima, obtendo o gráfico de $x \mapsto \frac{2x}{x+1}$. O resultado final é a figura abaixo:

13. Use o resultado do problema 8.2.4 do volume 2.

Seção 2.2

1. Para os itens (a) e (b), referimos o leitor à discussão do exemplo 2.11, mais precisamente à equação (2.2); quanto ao item (c), sugerimos ao leitor rever os itens (a) e (e) do problema 10, página 68.

2. Use uma das fórmulas do arco duplo do problema 7.2.3 do volume 2 para $\cos 2x$.

3. Use o resultado do problema 4, página 67.

4. Opere a mudança de variável $x = \sqrt{5}\cos\alpha$, onde $0 \le \alpha \le \pi$.

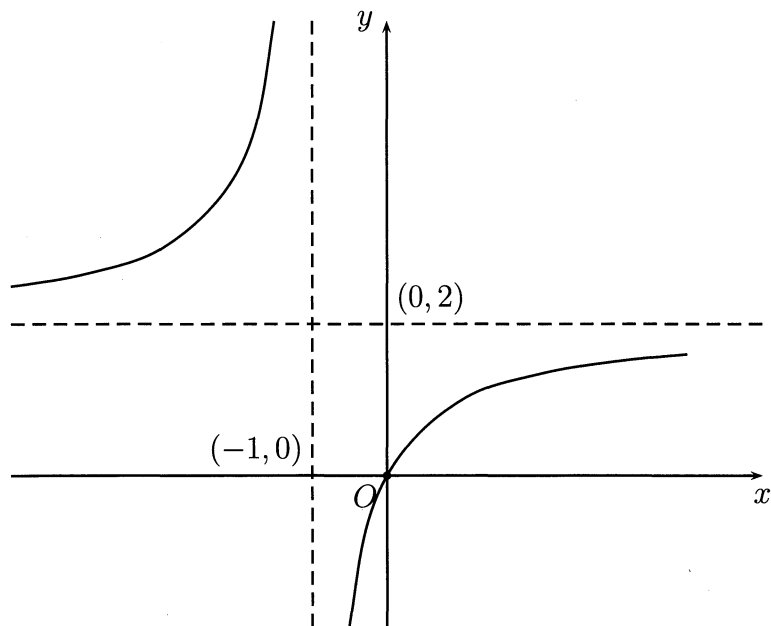



Figura 7.4: gráfico de $x \mapsto 2x/(x+1)$.

5. Suponhamos, por contradição, que f fosse periódica, de período $\tau > 0$. Então, deveria ser $f(\tau) = f(0) = 2$. Mas aí

$$2 = f(\tau) = \cos\tau + \cos(\alpha\tau) \leq 1 + 1 = 2,$$

uma vez que o cosseno de qualquer número real é no máximo 2. Assim, deve ser

$$\cos\tau = \cos(\alpha\tau) = 1.$$

Para tanto, devem existir inteiros (não nulos) k, l tais que $\tau = 2k\pi$ e $\alpha\tau = 2l\pi$. Dividindo membro a membro essas duas igualdades, chegamos a $\alpha = l/k$, contradizendo o fato de ser α irracional.

6. Inicialmente, mostre que a igualdade $f(x + 3\pi) = f(x)$ implica a igualdade $(-1)^n \text{sen}\left(\frac{5x}{n} + \frac{15\pi}{n}\right) = \text{sen}\left(\frac{5x}{n}\right)$, sempre que $nx \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

para $k \in \mathbb{Z}$. Em seguida, se n é ímpar, por exemplo, mostre que a última igualdade implica a igualdade $\text{sen}\left(\frac{5x}{n} + \frac{15\pi}{2n}\right)\cos\left(\frac{15\pi}{2n}\right) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $nx \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$; conclua, então, que n divide 15.

7. Suponha que tal função seja periódica de período $p > 0$; calcule $f(x+p)$ com a ajuda das fórmulas de adição de arcos e, em seguida, analise a igualdade $f(x+p) = f(x)$.

Seção 3.1

1. Mostre que, se fosse $a > b$, teríamos, eventualmente, $a_n > \frac{a+b}{2} > b_n$.

2. Suponha, sem perda de generalidade, que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$ e mostre que não podemos ter $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$.

3. Inicialmente, observe que

$$\sqrt[n]{\frac{n^k}{|a|^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{|a|} \to \frac{1}{|a|} < 1$$

quando $n \to +\infty$. Portanto, fixado um real α tal que $\frac{1}{|a|} < \alpha < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{n^k}{|a|^n}} < \alpha$ ou, ainda, $\frac{n^k}{|a|^n} < \alpha^n$. Mas, como $\alpha^n \to 0$ quando $n \to +\infty$, o mesmo sucede com $\frac{n^k}{a^n}$. Alternativamente, faça $|a| = 1 + \alpha$, com $\alpha > 0$, e veja que, para $n > k$,

$$\begin{aligned}|a|^n &= (1+\alpha)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\alpha^j > \binom{n}{k+1}\alpha^{k+1}\\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!}\cdot\alpha^{k+1}.\end{aligned}$$

Portanto, para $n > k$, temos

$$\begin{aligned}\frac{n^k}{|a|^n} &< \frac{(k+1)!}{\alpha^{k+1}} \cdot \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k)} \\ &= \frac{(k+1)!}{\alpha^{k+1}} \cdot \frac{1}{n(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k}{n})},\end{aligned}$$

com a última expressão acima tendendo a 0 quando $n \to +\infty$.

4. Construa, indutivamente, uma subsequência $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $a_{n_k} > n_k, a_1, a_2, \dots, a_{n_{k-1}}$.

5. Escreva $c = (1 - t_k)c + t_k c$ e use a desigualdade triangular para escrever $|c_k - c| \leq (1 - t_k)|a_k - c| + t_k|b_k - c|$.

6. Note primeiro que $|b_n - l| \leq \max\{|a_n - l|, |c_n - l|\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ e tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - l|, |c_n - l| < \epsilon$, teremos $|b_n - l| < \epsilon$ para $n > n_0$, de modo que $b_n \to l$.

7. Mostre que $|a_m - a_n| \leq \frac{2mk}{m^2+k^2} + \frac{2nk}{n^2+k^2}$ e, em seguida, faça $k \to +\infty$.

8. Se $\alpha = \min\{a_1, a_2\}$ e $\beta = \max\{a_1, a_2\}$, conclua que $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada, considerando separadamente os casos $0 < \alpha \leq \beta \leq 4$, $4 \leq \alpha \leq \beta$ e $0 < \alpha \leq 4 \leq \beta$. Se $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ ou $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, escreva $a_{k+2} - a_{k+1} = \sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_{k-1}}$ para concluir que, caso a sequência dada é monótona, ela será convergente; fazendo $k \to +\infty$ na recorrência do enunciado, conclua que $a_k \to 4$. Se $a_1 \leq a_3 \leq a_2$ ou $a_1 \geq a_3 \geq a_2$, conclua, como acima, que as subsequências de índices pares e ímpares são convergentes, digamos $a_{2k-1} \to c$ e $a_{2k} \to d$; fazendo $k \to +\infty$ na recorrência do enunciado, conclua que $d = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ e $c = \sqrt{c} + \sqrt{d}$, de sorte que $c = d = 4$.

9. Use o fato de $t_n = -t_0 - t_1 - \dots - t_{n-1} = 0$ para escrever

$$\begin{aligned}a_k &= t_0(\sqrt{k} - \sqrt{k+n}) + t_1(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+n}) + \cdots \\ &\quad + t_{n-1}(\sqrt{k+n-1} - \sqrt{k+n}) \\ &= -\frac{t_0}{\sqrt{k} + \sqrt{k+n}} - \frac{t_1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+n}} - \cdots \\ &\quad - \frac{t_{n-1}}{\sqrt{k+n-1} + \sqrt{k+n}}.\end{aligned}$$

Por fim, faça $k \to +\infty$.

10. Faça a substituição trigonométrica $x_n = 2\cos y_n$, com $y_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$, use um pouco de trigonometria e conclua que $y_{n+1} \geq 2y_n$, para todo $n \geq 1$. A partir daí, mostre que $y_n \leq \frac{y_{n+2k}}{2^k} \leq \frac{\pi}{2^{k+1}}$, para todo $k \geq 1$, de sorte que $y_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

11. Inicialmente, use a condição do enunciado para mostrar que $|(a_{n+1} - a_n) - (a_{k+1} - a_k)| < \frac{2}{n}$. Em seguida, fazendo $n \to +\infty$, conclua que existe $l = \lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n)$, e mostre que $a_{k+1} - a_k = l$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

12. Conclua, a partir da definição de a_n, que $a_{k-1} + 1 = \frac{2k}{k+1}a_k$, para todo inteiro $k \geq 2$. A partir daí, mostre que

$$a_{k-1} - a_k < \frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}(a_k - a_{k+1})$$

e conclua que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é não crescente para $n > 2$. Por fim, faça $k \to +\infty$ na igualdade $a_{k-1} + 1 = \frac{2k}{k+1}a_k$ para concluir que $a_n \to 1$ quando $n \to +\infty$.

13. Mostre, sucessivamente, que $a_n^2 = k + a_{n-1}$ e $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$, e conclua, a partir daí, que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é crescente. Use agora que $a_n^2 < k + a_n$ para concluir que $a_n < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4k+1})$ para todo $n \geq 1$, de sorte que a sequência em questão é convergente. Agora, faça $n \to +\infty$ em $a_n^2 = k + a_{n-1}$ para concluir que $a_n \to \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4k+1})$ quando $n \to +\infty$. A partir daí, os itens (b) e (c) são relativamente imediatos.

14. Primeiramente, use a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para concluir que $a_{k+1} \geq \sqrt{a}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, faça $k \to +\infty$ na recorrência acima para concluir que, se $(a_n)_{n\geq 1}$ for convergente, então seu limite é igual a $\sqrt{a}$. Para o que falta, use a desigualdade triangular para obter

$$\begin{aligned} |a_{k+1} - a_k| &= \frac{1}{2}\left|a_k - a_{k-1} + \frac{a}{a_k} - \frac{a}{a_{k-1}}\right| \\ &= \frac{1}{2}|a_k - a_{k-1}| \cdot \left|1 - \frac{a}{a_k a_{k-1}}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}|a_k - a_{k-1}|, \end{aligned}$$

para $k > 2$. Por fim, conclua a convergência de $(a_n)_{n\geq 1}$ a partir do exemplo 3.17.

15. Prove inicialmente que $a_{n+1} \geq a_n + 1$ e, daí, que $a_n \geq n$ para todo $n \geq 1$. Agora, use produtos telescópicos para mostrar que, fixado $p \in \mathbb{N}$, temos

$$1 < \frac{a_{n+p}}{a_n} < \prod_{j=0}^{p-1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a_{n+j}}}\right)$$

e, daí,

$$1 < \frac{a_{n+p}}{a_n} < \prod_{j=0}^{p-1}\frac{a_{n+j+1}}{a_{n+j}} < \prod_{j=0}^{p-1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a_{n+j}}}\right).$$

Mostre, então, que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a_{n+p-1}}}\right) = 1.$$

Agora, se $y = 1$, conclua o que se pede a partir do limite acima. Se $y < 1$, conclua a partir do limite acima que podemos escolher n_p natural tal que $n > n_p \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+p}} > y$. Utilizando que $a_k \geq k$ para todo k, mostre que podemos escolher n_0 natural tal que $\frac{1}{1+\sqrt{a_{n_0+1}}} < y - x$. Em seguida, conclua que $n > n_0$ e p natural fornecem

$$\frac{a_n}{a_{n+p}} - \frac{a_n}{a_{n+p} + \sqrt{a_{n+p}}} < y - x.$$

Fixe $k > n_0, n_p$, de modo que $\frac{a_k}{a_{k+p}} > y$; conclua pela existência de $p_0 > p$ tal que

$$\frac{a_k}{a_{k+p_0}} \geq y > \frac{a_k}{a_{k+p_0+1}}.$$

Por fim, suponha que $\frac{a_k}{a_{k+p_0+1}} \leq x$ e chegue a uma contradição.

16. Seja $c_0, c_1, c_2, \ldots$ a sequência definida por $c_0 = 1$ e

$$c_n = \left(\frac{a_{n-1}}{1 + a_n}\right)c_{n-1}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Reescrevendo esta relação como $c_n = a_{n-1}c_{n-1} - a_n c_n$, obtemos a soma telescópica

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_0 - a_n c_n. \tag{7.1}$$

Por outro lado, a assertiva do problema equivale a termos $\frac{c_n}{c_{n-1}} < 2^{-1/n}$, para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Suponha o contrário, i.e., que existe N natural tal que a desigualdade oposta se verifica para todo $n \geq N$. Então, para $n > N$, temos

$$c_n \geq c_N \cdot 2^{-\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)} = C \cdot 2^{-\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)},$$

onde $C = c_N \cdot 2^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$ é uma constante positiva. Se $2^{k-1} \leq n < 2^k$, então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} &\leq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{7}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1}\right) \\ &\leq 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = k, \end{aligned}$$

de modo que

$$c_n \geq C \cdot 2^{-k} \quad \text{para} \quad 2^{k-1} \leq n < 2^k.$$

Seja r tal que $2^{r-1} \leq N < 2^r$ e seja $m > r$. Então,

$$\begin{aligned} &c_{2^r} + c_{2^r+1} + \cdots + c_{2^m-1} = \\ &= (c_{2^r} + \cdots + c_{2^{r+1}-1}) + (c_{2^{r+1}} + \cdots + c_{2^{r+2}-1}) \\ &\quad + \cdots + (c_{2^{m-1}} + \cdots + c_{2^m-1}) \\ &\geq C \cdot (2^r \cdot 2^{-r-1} + 2^{r+1} \cdot 2^{-r-2} + \cdots + 2^{m-1} \cdot 2^{-m}) \\ &= \frac{C \cdot (m-r)}{2}, \end{aligned}$$

mostrando que a soma dos c_n pode ser tornada arbitrariamente grande. Contudo, por (7.1) essa soma nunca pode exceder a_0. Essa contradição mostra que $\frac{c_n}{c_{n-1}} < 2^{-1/n}$ se verifica para infinitos $n \in \mathbb{N}$, conforme desejado.

Seção 3.2

1. Faça $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{a^k}$ e, em seguida, mostre que

$$\begin{aligned} (a-1)S_n &= aS_n - S_n = a + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{a^n} \\ &= a + \frac{2a}{a-1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^n}\right) - \frac{2n-1}{a^n}. \end{aligned}$$

Agora, use os resultados do exemplo 3.3 e do problema 3, página 90, para concluir que $S_n \to \frac{a}{a-1} + \frac{2}{(a-1)^2}$ quando $n \to +\infty$.

2. Seja $r > 0$ a razão da PA. Para o item (a), temos

$$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1 + (k-1)r} > \frac{1}{2(k-1)r}$$

se $k > \frac{a_1}{r} + 1$. Para o item (b), temos

$$\frac{1}{a_{2^k}} = \frac{1}{a_1 + (2^k - 1)r} < \frac{1}{(2^k - 1)r} \leq \frac{1}{2^{k-1}r}.$$

Aplique, agora, o teste da comparação.

3. Comece mostrando que $\sum_{x \in A} \frac{1}{x} < \sum_{a,b,c=0}^{+\infty} \frac{1}{2^a 3^b 5^c}$. Em seguida, escreva o segundo somatório acima como o produto de três séries geométricas.

4. Use a desigualdade $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geq n^2$, válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Inicialmente, use o teste da comparação para mostrar que a série $\sum_{j\geq 1} \frac{a_j}{10^j}$ converge. Agora, denotando por x o valor de sua soma, observe que, para $k \geq n$,

$$x - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{10^j} = \sum_{j \geq n+1} \frac{a_j}{10^j} \leq \sum_{j \geq n+1} \frac{9}{10^j} = \frac{1}{10^n}.$$

7. Use que $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Use que $a_k^2 + \frac{1}{k^{2\alpha}} \geq \frac{2a_k}{k^\alpha}$, para todo $k \in \mathbb{N}$; em seguida, aplique o resultado da proposição 3.22.

9. Use que $\sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{1}{2}(a_k + a_{k+1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

10. Para o item (a) (a prova do item (b) é análoga), seja $q = \frac{l+1}{2} \in (0,1)$ e tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{a_n} < q$ para $n > n_0$ ou, o que é o mesmo, $a_n < q^n$ para $n > n_0$. A partir daí, adapte a argumentação do final da prova do teste da razão.

11. Pela definição de convergência para séries, basta mostrarmos que a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$, dada para $n \geq 1$ por $x_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, é convergente. Mas, como sabemos, isso é o mesmo que mostrar que ela é uma sequência de Cauchy. Para o que falta, sejam dados inteiros positivos m e n, com $m > n$. Segue da identidade de Abel (identidade

(7.20) do volume 1) e da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &= |a_n b_n + a_{n+1}b_{n+1} + \cdots + a_m b_m| \\ &= |(s_n - s_{n-1})(b_n - b_{n+1}) + (s_{n+1} - s_{n-1})(b_{n+1} - b_{n+2}) \\ &\quad + (s_{n+2} - s_{n-1})(b_{n+2} - b_{n+3}) + \cdots + \\ &\quad + (s_{m-1} - s_{n-1})(b_{m-1} - b_m) + (s_m - s_{n-1})b_m)| \\ &\leq (|s_n| + |s_{n-1}|)(b_n - b_{n+1}) + (|s_{n+1}| + |s_{n-1}|)(b_{n+1} - b_{n+2}) \\ &\quad + (|s_{n+2}| + |s_{n-1}|)(b_{n+2} - b_{n+3}) + \cdots + \\ &\quad + (|s_{m-1}| + |s_{n-1}|)(b_{m-1} - b_m) + (|s_m| + |s_{n-1}|)b_m)|.\end{aligned}$$

A partir daí, se $M > 0$ for tal que $|s_k| < M$ para todo $k \geq 1$, então

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leq 2M(b_n - b_{n+1}) + 2M(b_{n+1} - b_{n+2}) + \\ &\quad + 2M(b_{n+2} - b_{n+3}) + \cdots + 2M(b_{m-1} - b_m) + 2Mb_m \\ &= 2Mb_n \to 0\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$. Portanto, a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é realmente de Cauchy.

12. Nas notações do problema anterior, faça $a_k = (-1)^k$ e $b_k = \frac{1}{k}$.

13. Para a primeira parte, suponha que algum $x \in (0,1)$ admite duas expansões decimais distintas satisfazendo as condições do enunciado e derive uma contradição. Quanto à segunda parte, defina $f(x) = (y, z)$, com $y = 0, a_1a_3a_5\ldots$ e $z = 0, a_2a_4a_6\ldots$.

14. Sendo $\alpha_n = A_n\widehat{O}A_{n+1}$, temos $\operatorname{sen}\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Agora, use o ciclo trigonométrico para mostrar que $\operatorname{sen}\alpha > \alpha$, para todo $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, e conclua, a partir da divergência da série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\sqrt{k}}$, que $\sum_{k\geq 1}\alpha_k$ também diverge.

15. Sendo $\alpha_n = 2\beta_n$, basta provar que $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots = \frac{\pi}{4}$. Equivalentemente, sendo $b_n = \operatorname{tg}(\beta_1 + \cdots + \beta_n)$ para $n \geq 1$, basta provar que $b_n \to 1$ quando $n \to +\infty$. Use trigonometria para mostrar que

$$b_{n+1} = \frac{2(n+1)^2 b_n + 1}{2(n+1)^2 - b_n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$; a partir daí, conclua por indução que $b_n = \frac{n}{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Seção 3.3

2. Use o corolário 3.35 para construir indutivamente uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$, tal que $a_k = m_k + n_k\alpha$, para inteiros m_k e n_k satisfazendo o item (a), e $|a_k - l| < \frac{1}{k}$, para todo $l \geq 1$.

Seção 4.1

2. Comece observando que o conjunto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ é um retângulo aberto centrado em $P_0(x_0, f(x_0))$ e de lados paralelos aos eixos. Em seguida, lembre-se de que todo disco centrado em P_0 contém um retângulo aberto centrado em P_0 e de lados paralelos aos eixos, e vice-versa.

4. Imite a discussão do exemplo 4.8.

5. Use a regra da cadeia para funções contínuas.

6. Use o problema anterior, a regra da cadeia e o exemplo 4.5.

7. Idêntica à sugestão do problema anterior.

Seção 4.2

2. Use o TVI em cada caso. Esboçar os gráficos das funções envolvidas pode ajudar.

3. Se $y = ax + b$ é uma reta não vertical, i.e., tal que $a \neq 0$, basta provarmos que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada para $x \in \mathbb{R}$ por $g(x) = x^3 \operatorname{sen} x - ax - b$, é tal que $g(x) = 0$ para infinitos valores reais de x. Para o que falta, suponhamos $a > 0$ (o caso $a < 0$ pode ser tratado de modo análogo). Mostre que, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $g(k\pi) < 0 < g(k\pi + \frac{\pi}{2})$; em seguida, aplique o TVI.

4. Analise a função $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x + (1 - x)^2 \operatorname{sen} \pi(n-2)x$.

5. Como $x = 0$ não é solução, podemos reescrever a equação em questão como $f(x) = 0$, onde $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é a função dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{x^2} + a_i} - n.$$

Assim, devemos mostrar que f possui exatamente uma raiz positiva. Para tanto, como a função $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2} + a_i}$ é contínua e decrescente, e como f é uma soma finita de funções desse tipo, segue que f é também contínua e decrescente, o que implica dizer que f tem no máximo uma raiz positiva. Por outro lado,

$$-n = \lim_{x \to 0} f(x) < 0 < f(1) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + a_i} - n.$$

Assim, segue do TVI que f possui exatamente uma raiz positiva, situada no intervalo $(0,1)$.

6. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|.$$

Basta garantirmos a existência de $x \in [0,1]$ para o qual $f(x) = \frac{1}{2}$. Para tanto, note que

$$f(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{e} \quad f(1) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

de modo que $f(0) + f(1) = 1$. Se $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$, nada há a fazer. Senão, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f(0) < \frac{1}{2} < f(1)$. Nesse caso, como f é contínua, segue do TVI a existência de $0 < x < 1$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}$.

7. Primeiro, suponha que $f(0 = 0$. Com $x = 0$, obtemos $f(1) = f(0)f(2) + f(1) = 0$. Fazendo, agora, $x = 1$, obtemos $f(2) = f(1)f(3) + f(2) = 0$. Prosseguindo do mesmo modo, concluímos que $f(n) = 0$ para todo inteiro positivo n. Suponha, pois, que $f(0) > 0$ (o caso $f(0) < 0$ pode ser tratado da mesma maneira). Então, segue de $f(0)f(2) + f(1) = 0$ que $f(1)$ e $f(2)$ devem ter sinais contrários. Mas aí, o TVI garante que deve haver um real $a \in (1,2)$ tal que $f(a) = 0$. Argumentando como no caso $f(0) = 0$, conclua que $f(a + n) = 0$, para todo inteiro positivo n.

8. Faça $x = 1000$ e, em seguida, use o TVI para concluir que a imagem de f contém o intervalo $[\frac{1}{999}, 999]$. Use novamente o TVI para tomar $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 500$ e, por fim, faça $x = x_0$ na relação do enunciado.

9. Mostre primeiro que, se $n \in \mathbb{N}$, então $a = \frac{1}{n}$ satisfaz as condições do enunciado. Em seguida, se $a \neq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, construa uma função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x + a) \neq f(a)$, para todo $x \in [0, 1 - a]$.

10. Use a relação satisfeita por f para obter uma contradição ao TVI.

11. Inicialmente, mostre que uma tal f é uma bijeção de $[0,1]$ em si mesmo. Em seguida, use o teorema 4.21 para concluir que f é crescente ou descrescente. Por fim, suponha f crescente (o caso f decrescente pode ser tratado de modo análogo), de forma que (pela sobrejetividade de f e novamente pelo teorema 4.21) $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Se existe $x \in (0,1)$ tal $f(x) < x$, então o fato de f ser crescente, juntamente com a hipótese do problema, garante que $x = f(f(x)) < f(x)$, o que é uma contradição; analogamente, não podemos ter $f(x) > x$, de forma que $f(x) = x$ é a única possibilidade.

12. A prova desse resultado é uma simples adaptação do argumento da prova do teorema de Bolzano. Mais precisamente, suponha $I = [a, b]$ (os demais casos podem ser tratados de maneira similar), e defina $A = \{x \in [a, b]; [a, x] \subset J\}$. Se $c = \sup A$, use a condição (ii) para mostrar que $c \in J$. Em seguida, tome $\delta > 0$ como em (a) e $d \in A \cap (c - \delta, c)$ para concluir que $c \in A$. Por fim, suponha $c < b$ e use novamente (i) (com $0 < \delta < b - c$) para concluir que $c + \frac{\delta}{2} \in A$, o que é uma contradição.

13. Por contradição, suponha que existisse $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) < 0$. Utilize o lema 4.13, juntamente com o problema 1.5.4 do volume 1, para chegar a uma contradição.

14. Mostre que a condição do enunciado garante que $f(0) = f(m + n\alpha)$, para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Em seguida, use o corolário 3.34 do lema de Kronecker, juntamente com o resultado do problema anterior, para provar que f é constante.

15. Defina a função auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sum_{j=1}^{k} f(x + jr)$, com $r > 0$ a ser escolhido posteriormente. Em seguida, se $f(x_0) < 0 < f(x_1)$, aplique o lema de permanência do sinal para g para mostrar que r pode ser escolhido de forma tal que $g(x_0) < 0 < g(x_1)$. Por fim, aplique o TVI.

16. Observe inicialmente que, para $x \in (0, 1)$, a função $g(x) = x(f(x) - f(0))$ mede a área do retângulo que tem os pontos $(0, f(0))$ e $(x, f(x))$ como extremidades de uma diagonal; portanto, existe $0 < x_1 < 1$ tal que esse retângulo tem área igual a $\frac{1}{n^2}$. Argumentando de maneira análoga, construa retângulos $R_1, \ldots, R_k$, cada um dos quais tendo lados paralelos aos eixos coordenados e área $\frac{1}{n^2}$, cuja união cobre o gráfico de f e está contida no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ do plano Cartesiano. Por fim, use a desigualdade de Cauchy para mostrar que $k \leq n$.

17. Suponha, por contradição, que existam $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ para os quais $f(x_0) < f(y_0)$; suponha, ademais, (os outros casos são análogos) que $y_0 \in (x_0, x_0 + f(x_0))$. Use que $f(x_0 + f(x_0)) = f(x_0)$ para mostrar ser possível escolhermos $n \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que a reta r de equação $x + ny = c$ deixa o ponto $(y_0, f(y_0))$ e os pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + f(x_0), f(x_0 + f(x_0)) = (x_0, f(x_0))$ em semiplanos opostos. Mostre, agora, que o TVI garante a existência de reais $a \in (x_0, y_0)$ e $b \in (y_0, x_0 + f(x_0))$ tais que os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ estão sobre a reta r, i.e., tais que $a + nf(a) = c$ e $b + nf(b) = c$. Por fim, conclua que $f(c) = f(a + nf(a)) = f(a)$ e $f(c) = f(b + nf(b)) = f(b)$, de sorte que $f(a) = f(b)$ e, portanto, $a = b$.

18. Fazendo $x = y = 0$, obtemos $f(0) + g(0) = h(0)$. Assim, definindo $f_1(x) = f(x) - f(0)$, $g_1(x) = g(x) - g(0)$ e $h_1(x) = h(x) - h(0)$, temos

$$f_1(x + y^3) + g_1(x^3 + y) = h_1(xy),$$

com $f_1(0) = g_1(0) = h_1(0) = 0$. Podemos, portanto, começar supondo que $f(0) = g(0) = h(0) = 0$. Fazendo $y = -x^3$ na relação do enunciado, obtemos $g(x - x^9) = h(-x^4)$ para todo x. Fazendo $x = -y^3$, obtemos $f(-y^9 + y) = h(-y^4)$, para todo $y \in \mathbb{R}$; daí, segue que $f(x - x^9) = g(x - x^9)$. Mas, como a imagem da função polinomial $x \mapsto x - x^9$ é o conjunto dos números reais (pelo exemplo 4.17), temos $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A relação do enunciado se reduz, então, a

$$f(x + y^3) + f(x^3 + y) = h(xy). \tag{7.2}$$

Fazendo sucessivamente $y = -x^3$ e $x = -y^3$ em (7.2) e levando em conta que $f(0) = 0$, obtemos, respectivamente,

$$f(x - x^9) = h(-x^4) \text{ e } f(-y^9 + y) = h(-y^4),$$

de modo que $f(x - x^9) = f(-x^9 + x)$. Usando de novo o fato de que a imagem da função polinomial $x \mapsto x - x^9$ é $\mathbb{R}$, segue que f é uma função par, i.e., tal que que $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo, agora, $y = 0$ em (7.2), obtemos $f(x) + f(x^3) = 0$, de modo que $f(x) = -f(x^3)$. Voltando a (7.2), essa relação nos dá

$$f(x^3 + y) - f((x + y^3)^3) = h(xy).$$

Mas, f par implica, então,

$$f(x^3+y) - f(-(x+y^3)^3) = h(xy).$$

Daí, segue que, se $a \in \mathbb{R}$ for tal que existam reais x e y satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases} xy = a \\ x^3 + y = -(x+y^3)^3 \end{cases},$$

então $h(a) = 0$. Provemos que esse é o caso para todo $a \le 0$. Se $a = 0$, já temos $h(a) = 0$. Se $a \neq 0$, então a segunda equação do sistema acima equivale a $y^9 + 3y^6x + 3x^2y^3 + y + 2x^3 = 0$. Escrevendo $x = \frac{y}{a}$, segue que basta garantirmos a existência de um real y tal que

$$y^{12} + 3ay^8 + (3a^2+1)y^4 + 2a^3 = 0.$$

Para tanto, seja $p(y) = y^{12} + 3ay^8 + (3a^2+1)y^4 + 2a^3$. Se $a < 0$, então $p(0) = 2a^3 < 0$ e $p(-a) > 0$, de modo que o TVI garante que p tem ao menos uma raiz real. Para terminarmos, veja que $f(x - x^9) = h(-x^4)$, de modo que $f(x - x^9) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Usando novamente a sobrejetividade de f, segue que $f = 0$. Daí, (7.2) nos dá $h = 0$. Então, as funções f, g e h que satisfazem as condições do enunciado são as funções constantes $f = f(0)$, $g = g(0)$ e $h = h(0)$, tais que $f(0) + g(0) = h(0)$.

Seção 4.3

1. Basta tomar $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$, para todo $x \in (a,b)$.

2. Mostre inicialmente que $f(x) = f(1)x$, para $x \in \mathbb{Q}$. Em seguida, fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, escolha uma sequência $(a_n)_{n\ge1}$ em $\mathbb{Q}$, tal que $a_n \to x_0$ quando $n \to +\infty$, e aplique a proposição 4.24.

4. Comece utilizando a segunda hipótese do enunciado para mostrar que f é injetiva; para tanto, tome $x, y \in \mathbb{R}$ distintos e considere $(a_n)_{n\ge1}$ a sequência divergente tal que $a_{2k} = x$ e $a_{2k-1} = y$, para todo $k \ge 1$. Por fim, use as hipóteses sobre f para mostrar que f^{-1} transforma sequências convergentes em sequências convergentes.

5. Para o item (a), adapte o argumento da prova do exemplo 4.17. Para o item (b), use o resultado do item (a), em conjunção com o teorema 4.31.

6. Pelo exemplo 4.16, a função g tem um ponto fixo x_0. Se $x_n = g(x_{n-1})$ para $n \ge 1$, mostre que a sequência $(x_n)_{n\ge1}$ é não decrescente e tal que $f(x_n) = x_n$, para todo $n \ge 1$. Se $x_n \to a$, use a proposição 4.24 para mostrar que $f(a) = g(a) = a$.

7. O item (a) segue imediatamente de (4.11). Quanto a (c), por um lado temos

$$f(\alpha) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \alpha;$$

por outro, se $\beta \in \mathbb{R}$ for tal que $f(\beta) = \beta$, então

$$|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| \le c|\alpha - \beta|,$$

juntamente com $0 < c < 1$, garante que $|\alpha - \beta| = 0$, conforme desejado.

8. Pondo $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1})$, temos claramente $f(x) < x$ para todo real x. Ademais,

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{1}{2}\left| x - y + \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \right| \\ &= \frac{1}{2}|x-y| \left| 1 + \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \right| \\ &\le \frac{1}{2}|x-y| \left| 1 + \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \right| \\ &< |x-y|. \end{aligned}$$

Seção 5.1

5. Para o item (a), se $k \in \mathbb{N}$, mostre que $\underline{S}(f;k) \leq \underline{S}(g;k)$. Para o item (b), se $\lambda > 0$, mostre que $\underline{S}(\lambda f;k) = \lambda \underline{S}(f;k)$. Em seguida, use a definição de integral.

6. Observe que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, para todo $x \in [a,b]$. Em seguida, use o item (a) do problema anterior.

7. Observe que
$$\int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx \geq 0,$$
para todo $t \in \mathbb{R}$. Desenvolvendo $(f(x) - tg(x))^2$, conclua que $At^2 - 2Bt + C \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $A = \int_a^b g(x)^2 dx$, $B = \int_a^b f(x)g(x)dx$ e $C = \int_a^b f(x)^2 dx$. Em seguida, use o corolário 1.16.

8. Mostre inicialmente que, fixado $t \in [0,1]$, o fato de f ser não decrescente garante que $A(R_f)$ é maior ou igual que a área do retângulo de base $[t,1]$ e altura $f(t)$, i.e., que
$$\int_0^1 f(x)dx \geq (1-t)f(t) \geq f(t) - t.$$
Em seguida, fixe $s \in [0,1]$ e faça $t = g(s)$ na desigualdade acima para obter
$$f(g(s)) - g(s) \leq \int_0^1 f(x)dx.$$
Por fim, use o fato de $s \in [0,1]$ ter sido escolhido arbitrariamente, para concluir que
$$\int_0^1 (f(g(s)) - g(s))ds \leq \int_0^1 f(x)dx).$$

Seção 5.2

2. Suponha que $\log_{10} 2$ é racional e chegue a uma contradição.

3. Examine os gráficos das funções definidas, para $x > 0$, pelos dois membros da igualdade em questão.

4. Faça $a = b = \sqrt{2}$ e analise separadamente as possibilidades a^b racional e a^b irracional, observando, neste último caso, que $(a^b)^b \in \mathbb{Q}$.

5. Esboce os gráficos das funções $x \mapsto x^2$ e $x \mapsto 2^x$. Em seguida, use o TVI para mostrar que existe $x_0 \in (-2,0)$ tal que $x_0^2 = 2^{x_0}$. Para mostrar que x_0 é irracional, argumente por contradição.

6. Primeiramente, note que a função $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ é sempre positiva e crescente e, assim, a função $g(x) = x + \log f(x)$ está bem definida no conjunto dos números reais e é também crescente. Agora, o sistema pode ser escrito como
$$g(x) = y, \quad g(y) = z, \quad \text{e} \quad g(z) = x.$$
Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x = \max\{x,y,z\}$. Então, $g(x) = \max\{g(x), g(y), g(z)\}$, de modo que $y \geq z, x$. Em particular deve ser $y = x$, e um argumento análogo prova que deve ser $x = y = z$. Mas aí, basta resolvermos a equação $\log(x + \sqrt{x^2+1}) = 0$ ou, ainda, $x + \sqrt{x^2+1} = 1$, a qual tem $x = 0$ como única solução.

7. Se $k \in \mathbb{Z}_+$ é tal que $10^k \leq n < 10^{k+1}$, conclua que $k = \lfloor \log_{10} n \rfloor$.

8. Queremos que, para certos $n, l \in \mathbb{N}$, tenhamos
$$(a_1a_2\ldots a_m\underbrace{00\ldots0}_{l})_{10} \leq n^k \leq (a_1a_2\ldots a_m\underbrace{99\ldots9}_{l})_{10}$$
ou, ainda, $10^l p \leq n^k < 10^l(p+1)$, onde $p = (a_1a_2\ldots a_m)_{10}$. Tome $l = kq$ e mostre que, nesse caso, a última condição acima equivale à existência de um natural n tal que $n \in [10^q\sqrt[k]{p}, 10^q\sqrt[k]{p+1})$, para o quê é suficiente termos $10^q(\sqrt[k]{p+1} - \sqrt[k]{p}) > 1$ ou, ainda, $q > -\log_{10}(\sqrt[k]{p+1} - \sqrt[k]{p})$.

9. Queremos mostrar que existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que
$$s \cdot 10^m \leq a^n \leq (s+1) \cdot 10^m.$$

Tomando logaritmos decimais, isso é o mesmo que mostrar que existem inteiros positivos m e n tais que $\log_{10} s + m \leq n \log_{10} a \leq \log_{10}(s+1) + m$ ou, ainda,

$$\log_{10} s \leq -m + n\log_{10} a \leq \log_{10}(s+1).$$

Se mostrarmos que $\log_{10} a$ é irracional, a prova estará terminada devido ao corolário 3.35. Suponha, por contradição, que $\log_{10} a \in \mathbb{Q}$, digamos $\log_{10} a = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ primos entre si. Então $a^q = 10^p$, de sorte que, pelo teorema fundamental da aritmética (cf. introdução ao capítulo 1 do volume 1), podemos escrever $a = 2^k 5^l b$, onde b não tem fatores 2 nem 5 e k e l são inteiros não-negativos. Mas aí, temos $2^{kq}5^{lq}b^q = 2^p 5^p$ e, portanto, $b = 1$, $kq = p$ e $lq = p$, de modo que em particular $k = l$. Ocorre que isso nos daria $a = 2^k 5^k = 10^k$, o que é uma contradição.

10. Comece mostrando que $\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b)$ e $\log_c(\log_c a) > \log_b(\log_c a)$. Em seguida, aplique o item (e) do problema 1.

11. Se $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ e $b_{n+1} = 3b_n + 5$, mostre que $f(a_n) = b_n$, para todo $n \geq 0$. Conclua, a partir daí, que $f(2^n - 1) = \frac{5}{2}(3^n - 1)$ para todo $n \geq 0$, e resolva a equação $2^n - 1 = x$ para n.

12. Queremos mostrar que existem infinitos inteiros k e l tais que $3 \cdot 10^k < 2^n < 4 \cdot 10^k$ e $3 \cdot 10^l < 5^n < 4 \cdot 10^l$ ou, ainda (tomando logaritmos decimais), que $\log_{10} 3 < -k + n\log_{10} 2 < \log_{10} 4$ e $\log_{10} 3 < -l + n\log_{10} 5 < \log_{10} 4$. Use, agora, o resultado do corolário 3.35.

13. Tome $a > 2$ inteiro, e suponha que $f(a) \leq a^2 - 1$. Se $m, n \in \mathbb{N}$ são tais que
$$\frac{\log 2^2}{\log a^2} < \frac{m}{n} < \frac{\log 2^2}{\log(a^2-1)},$$
então $2^n < a^m$ e $(a^2-1)^m < 2^{2n}$. Portanto, duas aplicações de (c), seguidas por aplicações de (a) e (b), nos dão
$$f(2^n) = 2^{2n} > (a^2-1)^m \geq f(a)^m = f(a^m) > f(2^n),$$

o que é uma contradição. Agora, argumente de modo análogo para mostrar que não podemos ter $f(a) \geq a^2 + 1$.

14. Comece mostrando que $f(0) = 0$, 1 ou 2. Nos dois primeiros casos, mostre que f é constante. No terceiro, mostre inicialmente que $f(m) = 2m$ sempre que m é uma potência de 2. Em seguida, tome $n < m$ e suponha que $f(m) = f(n)$; mostre, por indução, que $f(m^{2^k}) = f(n^{2^k})$ e, para chegar a uma contradição, escolha $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que $\log_2 n < \frac{b}{2^c} < \frac{a}{2^c} < \log_2 m$.

Seção 5.3

3. f é ímpar e sua restrição a $(0, +\infty)$ é convexa (pelo problema anterior), assume seu valor mínimo em $x = 1$ e está contida na porção do primeiro quadrante delimitada pelo eixo das ordenadas e pela bissetriz dos quadrantes ímpares.

4. Escreva $f(x) = \frac{(x-1)+1}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ e mostre que cada uma das funções $t \mapsto -\sqrt{t}$ e $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t \in (0,1)$, é estritamente convexa. Em seguida use o resultado do problema 2.

6. Aplique o resultado do problema anterior.

7. Sendo F uma integral indefinida de f e $a < x < y < b$, use (5.8) e a monotonicidade de f para comparar as diferenças $F(y) - F\left(\frac{x+y}{2}\right)$ e $F\left(\frac{x+y}{2}\right) - F(x)$.

9. Use as hipóteses sobre f para mostrar que, para x e y positivos e distintos, tem-se
$$\frac{xf(x) + yf(y)}{x+y} \geq f\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Seção 5.4

1. Suponha que existam naturais $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tais que a sequência $(f(n_k))_{k\geq 1}$ seja uma PA. Use a convexidade estrita e o caráter crescente de f para obter sucessivamente, para $k > 1$,
$$f(n_k) > f\left(\frac{n_{k-1}+n_{k+1}}{2}\right)$$
e $2n_k > n_{k-1} + n_{k+1}$. Por fim, chegue a uma contradição.

2. Use o caráter estritamente convexo da função de proporcionalidade inversa.

3. Use a convexidade estrita da função $f(x) = x^k$, com $x > 0$.

4. Para o item (b), observe inicialmente que, pelo item (a), podemos supor que O pertence ao interior de $A_1A_2\ldots A_n$. Sendo $\alpha_i = A_i\widehat{O}A_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n$ (com $A_{n+1} = A_1$), isso garante que $0 < \alpha_i < \pi$ para todo i. Agora, use a desigualdade de Jensen, nos moldes do exemplo 5.24.

5. Sendo $\alpha_i = A_i\widehat{O}A_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n$ (com $A_{n+1} = A_1$), temos $0 < \alpha_i < \pi$. Mostre, agora, que o perímetro do polígono é $r\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}$; em seguida, use a convexidade estrita da função $\operatorname{tg} : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

6. A lei dos senos fornece $a+b+c = 2R(\operatorname{sen}\widehat{A} + \operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}\widehat{C})$. Agora, aplique a desigualdade de Jensen à função $\operatorname{sen} : (0,\pi) \to \mathbb{R}$.

7. Aplique a desigualdade de Jensen à luz do resultado do problema 4, página 183.

8. De acordo com o problema 5.1.7 do volume 2, temos $x + y + z = h$. Mostre, agora, que a função $f : (0,h) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{h-x}{h+x}$ é estritamente convexa e aplique a desigualdade de Jensen.

9. Por contradição, suponha que $P\widehat{A}B,\ P\widehat{B}C,\ P\widehat{C}A > 30°$. Então, temos $\operatorname{sen} P\widehat{A}B,\ \operatorname{sen} P\widehat{B}C,\ \operatorname{sen} P\widehat{C}A > \frac{1}{2}$. Use a forma trigonométrica do teorema de Ceva (cf. problema 7.3.37 do volume 2) para deduzir que
$$\operatorname{sen} P\widehat{A}C \cdot \operatorname{sen} P\widehat{C}B \cdot \operatorname{sen} P\widehat{B}A > \frac{1}{8}.$$
Por fim, aplique a desigualdade de Jensen à função estritamente côncava $x \mapsto \log \operatorname{sen} x$ (cf. problema 6, página 183) para chegar a uma contradição.

10. Use a concavidade estrita da função logaritmo natural, nos moldes do exemplo 5.25.

11. Faça $S = \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right)^{1/k}$ e escreva
$$S^k = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{k-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{k-1}.$$
Em seguida, escolha $q > 0$ tal que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{k}$ e aplique a desigualdade de Hölder a cada um dos somatórios acima.

Seção 6.1

1. Adapte, ao presente caso, a demonstração da unicidade do limite de uma sequência, dada na proposição 3.5.

6. Multiplique o numerador e o denominador da fração por $1 + \cos x$. Em seguida, use o limite trigonométrico fundamental.

7. Para a segunda parte, analise o comportamento de f ao longo das sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$, tais que $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ e $b_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$, para todo $n \geq 1$.

10. Adapte, ao presente caso, a discussão do exemplo 4.17.

11. Comece fazendo $x = 1$ em (a) para obter $f(f(y)) = yf(1)$, para todo $y > 0$. Em seguida, use essa relação para mostrar que f é injetiva e, então, que $f(1) = 1$ e $f(f(x)) = x$, para todo $x > 0$. Se $a > 0$

é ponto fixo de f, mostre que $\frac{1}{a}$ também o é, de sorte que podemos supor que $a \geq 1$. Conclua que a^k é ponto fixo de f para todo $k \in \mathbb{N}$, e use (b) para mostrar que $a = 1$. Por fim, fazendo $x = y$ em (a), conclua que $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x > 0$.

Seção 6.2

5. Adapte, ao presente caso, a discussão do exemplo 6.30.

6. Inicialmente, verifique que a discussão que precede o lema 6.27 nos permite escrever, para $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0) + \frac{r(x-x_0)}{x-x_0}}{g'(x_0) + \frac{s(x-x_0)}{x-x_0}},$$

com $\lim_{x\to x_0} \frac{r(x-x_0)}{x-x_0}$ e $\lim_{x\to x_0} \frac{s(x-x_0)}{x-x_0} = 0$.

7. Pela continuidade da função logaritmo natural, basta mostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} x \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) = a$$

ou, ainda (fazendo $y = \frac{1}{x}$), que $\lim_{y\to 0+} \frac{\log(1+ay)}{y} = a$. Para tanto, use a regra de l'Hôspital.

8. Escolha um sistema Cartesiano de coordenadas tal que $F(0, c)$ e $d : \{y = -c\}$. Em seguida, obtenha a equação de $\mathcal{P}$ em um tal sistema, escreva $P_i(a_i, b_i)$, para $i = 1, 2$, e calcule a abscissa x_i do ponto de interseção da tangente a $\mathcal{P}$ traçada por P_i com a diretriz d. Por fim, use a colinearidade de P_1, P_2 e F para concluir que $x_1 = x_2$.

9. Para $k \geq 0$, ponha $f^{(k)}(x) = a_k e^{-x}\text{sen}\, x + b_k e^{-x}\cos x$, de sorte que

$$f^{(k+1)}(x) = -(a_k + b_k)e^{-x}\text{sen}\, x + (a_k - b_k)e^{-x}\cos x$$

e, portanto, $a_{k+1} = -(a_k + b_k)$, $b_{k+1} = a_k - b_k$. Conclua, a partir daí, que $b_{k+2} + 2b_{k+1} + 2b_k = 0$, para $k \geq 0$, e use o material da seção 4.3 do volume 1 para obter $f^{(k)}(0) = b_k$.

10. Sendo $\tau > 0$ o período de f, mostre que $f^{(k)}(\tau) = f^{(k)}(0)$, para todo inteiro $k \geq 0$. Conclua que, para $0 \leq k \leq n-1$, tais equações fornecem um sistema de equações nas incógnitas $\cos(j\tau)$, $1 \leq j \leq n$, cuja única solução é $\cos(j\tau) = 1$, para todo $1 \leq j \leq n$ – para provar este último fato, você terá de utilizar o resultado da proposição 6.5 do volume 6.

11. Provemos que $f'(\sqrt{k}) = 0$. Como $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$, segue que $f(\sqrt{k}) = 0$. Daí, sendo x um irracional diferente de $\sqrt{k}$ temos

$$\frac{f(x) - f(\sqrt{k})}{x - \sqrt{k}} = 0.$$

Basta, pois, mostrarmos que

$$\lim_{\substack{x\to\sqrt{k}\\ x\in\mathbb{Q}}} \frac{f(x) - f(\sqrt{k})}{x - \sqrt{k}} = 0.$$

Para tanto, seja $x = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$, uma fração irredutível. Temos

$$\left|\frac{f(x) - f(\sqrt{k})}{x - \sqrt{k}}\right| = \frac{q^{-3}}{|p/q - \sqrt{k}|} = \frac{1}{q^2|p - q\sqrt{k}|}$$
$$= \frac{p + q\sqrt{k}}{q^2|p^2 - q^2k|} \leq \frac{p + q\sqrt{k}}{q^2} = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q} + \sqrt{k}\right).$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{2\sqrt{k}+1}{\epsilon}$ e seja

$$A = \{p/q;\ p, q \in \mathbb{N},\ 0 < q \leq n\}.$$

Veja que A é um conjunto finito. Tomando

$$\delta = \min\{1, \{|x - \sqrt{k}|;\ x \in A\}\},$$

temos que $|\frac{p}{q} - \sqrt{k}| < \delta \Rightarrow q \geq n$, ao passo que $\frac{p}{q} < \sqrt{k} + 1$ implica

$$\left|\frac{f(x) - f(\sqrt{k})}{x - \sqrt{k}}\right| = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q} + \sqrt{k}\right) < \frac{2\sqrt{k}+1}{n} < \epsilon.$$

Seção 6.3

4. Aplique o resultado da proposição 6.43 à função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x - x - 1$.

5. Claramente, basta mostrarmos que $f^{(k)}(0)$ existe e é igual a 0, para todo $k \neq 0$. Para tanto, observe inicialmente que $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$, de sorte que f é contínua em $\mathbb{R}$. Examinemos, agora a primeira derivada de f. Para $x \neq 0$, temos $f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-1/x^2}$; para $x = 0$, observe inicialmente que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-1/x^2}}{x}.$$

Fazendo $t = \frac{1}{x}$, temos $t \to \pm\infty$ quando $x \to 0$ e $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{t}{e^{t^2}}$. Como $e^{t^2} > 1 + t^2$ pelo problema anterior, segue que

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \frac{|t|}{e^{t^2}} < \frac{|t|}{1 + t^2} \to 0$$

quando $t \to \pm\infty$. Portanto, f é derivável em $x = 0$, com $f'(0) = 0$. Para a segunda derivada, note que, para $x \neq 0$, temos $f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot f(x)$. Portanto, pela regra do produto, segue que

$$f''(x) = \left(\frac{4 - 6x^2}{x^6}\right) f(x)$$

para $x \neq 0$, e um argumento análogo ao feito acima para calcular $f'(0)$ mostra que $f''(0)$ existe e também vale 0.

6. Faça $h(x) = f(x)\text{sen}\, x + g(x)\cos x$ e $l(x) = f(x)\cos x - g(x)\text{sen}\, x$, de sorte que $h(0) = 1$ e $l(0) = 0$. Em seguida, calcule $h'(x)$ e $l'(x)$ e conclua que h é constante e igual a 1, ao passo que l é constante e igual a 0.

7. Se $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são tais que $g(x) = f(x) - f(0)\cos x$ e $h(x) = g'(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que $h'(x) = -g(x)$. Em seguida, use o resultado do problema anterior para mostrar que $g(x) = f'(0)\text{sen}\, x$.

8. Conclua que é suficiente mostrar que a função $f(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{x^n}$, $x > 0$, atinge seu valor mínimo em $x = n$. Para tanto, estude a primeira variação de f.

9. Use o TVM em conjunção com o resultado do problema 7, página 150.

10. Mostre, inicialmente, que

$$y = \frac{1}{2}\left(p(\sqrt{1 + x^2} - x) + \frac{1}{p}(\sqrt{1 + x^2} + x)\right).$$

Em seguida, estude a variação da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + y$, onde y é dado em função de x como acima.

11. Use a desigualdade entre as médias para dois números para concluir que a expressão acima é maior ou igual que $f(x + y)$, onde $f(t) = t + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}$ para $t > 0$. Em seguida, estude a primeira variação da função f.

12. Fazendo $\alpha = \text{sen}\, \frac{\widehat{A}}{2}$ e $\beta = \text{sen}\, \frac{\widehat{B}}{2}$, mostre que basta analisar a igualdade $f(\alpha) = f(\beta)$, onde $f(x) = \frac{x^{23}}{(1-x^2)^{24}}$, $x \in (0, 1)$. Estude, então, a primeira variação de f.

13. Aplique o teorema de Rôlle à função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada, para $x \in [a, b]$, por $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$, $x \in [a, b]$.

14. Tome, em $I \setminus \{c\}$, uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$, com $x_n \to c$. Se $x_n > c$ (resp. $x_n < c$), então, aplicando o TVM ao intervalo $[c, x_n]$ (resp. $[x_n, c]$), concluímos pela existência de $y_n \in (c, x_n)$ (resp. $y_n \in (x_n, c)$) tal que

$$f'(y_n) = \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}. \tag{7.3}$$

Em qualquer caso, temos $y_n \to c$ e $y_n \neq c$, de forma que, por nossas hipóteses, temos $f'(y_n) \to L$. Portanto, segue de (7.3) que $\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c} \to L$. O raciocínio acima mostrou que

$$x_n \to c \Rightarrow \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \to L.$$

Mostre que isso é suficiente para garantir que $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ existe e é igual a L.

15. Para o item (b), use o resultado de (a). Para o item (a), considere dois casos separadamente: se f não for injetiva em $[a,b]$ mostre que basta usar o TVM; se f for injetiva em (b), conclua que f será monótona e, daí, que $f'\geq 0$ em $[a,b]$ ou $f'\leq 0$ em $[a,b]$.

16. Comece utilizando a relação do enunciado para mostrar que, se uma tal f existisse, então teríamos $f'(x)\leq -1$, para todo $x>0$. Em seguida, use o TVM para mostrar que f deveria assumir valores negativos.

17. Aplique repetidas vezes o seguinte fato: se $k\in\mathbb{R}$ é tal que $f(x)+kf'(x)\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, então $f(x)\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Para provar tal fato, comece utilizando o resultado do problema 10, página 212, para mostrar que f tem grau par e coeficiente líder positivo. Em seguida, tome (pelo problema 5, página 149) $x_0\in\mathbb{R}$ tal que f atinge seu valor mínimo em x_0 e aplique o corolário 6.38.

18. Use o TVM para garantir a existência de $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=1$. Se $f(c)=c$, mostre que basta aplicar o TVM mais duas vezes. Se $f(c)<c$, use o TVM para garantir a existência de $\alpha\in(0,c)$ e $\beta\in(c,1)$ tais que $f'(\alpha)<1$ e $f'(\beta)>1$; em seguida, aplique o teorema de Darboux (cf. problema 15). Se $f(c)>c$, argumente de maneira análoga.

19. Comece usando o TVM para mostrar que existe $0<\delta<1$ tal que $|f(x)|<|x|$, para $|x|<\delta$. Itere esse argumento, mostrando que (com o mesmo δ) $|f(x)|\leq|x|^n$, para $|x|<\delta$ e todo $n\in\mathbb{N}$. Conclua, a partir daí, que $f(x)=0$, para $|x|<\delta$. Em seguida, estenda o argumento acima, mostrando que, se $f(x_0)=0$, então existe $\delta>0$ tal que $f(x)=0$, para $|x-x_0|<\delta$. Por fim, use o resultado do problema 12, página 140, para concluir que $f(x)=0$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

Seção 6.4

4. Estude a primeira variação da função $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, para $x\in(0,+\infty)$ (aqui, para x, $g(x)>0$, definimos $g(x)^x$ como $\exp(x\log g(x))$).

5. Derive $g(x)=e^{-x}f(x)$ e utilize a proposição 6.43.

6. Adapte, ao presente caso, a discussão do exemplo 6.56.

7. Por contradição, derive a igualdade $p(x)=\log x$ e, em seguida, use o resultado do problema 10, página 212.

8. Tomando logaritmos naturais, concluímos que basta comparar os números $\frac{1}{e}$ e $\frac{\log\pi}{\pi}$. Para tanto, estude a primeira variação da função $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{\log x}{x}$, para $x\in(0,+\infty)$, mostrando que seu valor mínimo é atingido somente em $x=e$.

9. Adapte a sugestão dada ao problema anterior.

10. Aplique o TVM usual à integral indefinida de f baseada no ponto a.

11. Inicialmente, use os cálculos do exemplo 6.53 para mostrar que existe uma única $f_0\in\mathcal{F}$ da forma $f_0(x)=A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x$, com $A,B\in\mathbb{R}$. Agora, expanda a desigualdade $\int_0^\pi(f(x)-f_0(x))^2dx\geq 0$ para chegar ao resultado desejado.

12. Para o item (a), estude a variação da função $x\mapsto\log(x+1)-x$, $x\geq 0$. Para o item (b), observe inicialmente que, pela fórmula de integração por partes, temos
$$n\int_0^1\frac{x^n}{x^n+a}dx=n\int_0^1 x\cdot\frac{nx^{n-1}}{x^n+a}dx=\int_0^1 x\cdot\frac{d}{dx}\log(x^n+a)dx$$
$$=\log(a+1)-\int_0^1\log(x^n+a)dx.$$
Por outro lado, pelo item (a), temos
$$\log a\ \leq\ \int_0^1\log(x^n+a)dx=\int_0^1\left(\log a+\log\left(\frac{x^n}{a}+1\right)\right)dx$$
$$\leq\ \log a+\int_0^1\frac{x^n}{a}dx.$$

Por fim, combine os cálculos acima para inferir o limite do enunciado.

Seção 6.5

2. É imediato que $f(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{|x| \to +\infty} e^{-1/x^2} = 1$. Assim, o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo das ordenadas (pois f é par), está inteiramente contido na faixa do plano Cartesiano situada entre as retas $y = 0$ e $y = 1$ e se aproxima mais e mais da reta $y = 1$ quando $x \to \pm\infty$. Agora, mostramos no problema 5, página 239, que f é duas vezes derivável, com $f'(0) = f''(0) = 0$ e, para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-1/x^2} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{(4 - 6x^2)}{x^6} \cdot e^{-1/x^2}.$$

Portanto, f é crescente em $[0, +\infty)$, decrescente em $(-\infty, 0]$, estritamente convexa para $|x| < \frac{2}{\sqrt{6}}$ e estritamente côncava para $|x| > \frac{2}{\sqrt{6}}$. De posse das informações acima, esboçe o gráfico de f.

3. Use a desigualdade entre as médias de potências.

4. Use a concavidade estrita da função $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$, $0 < x < 1$, juntamente com a desigualdade de Jensen.

5. Use a convexidade estrita da função $f(x) = x \log x$, $x > 0$, juntamente com a desigualdade de Jensen.

6. Aplique a desigualdade de Jensen à função $f(x) = \log \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $x \in (0, \pi)$.

7. Faça $a_i = e^{x_i}$, com $x_i \geq 0$, mostre que a função $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \geq 0$, é estritamente convexa e aplique a desigualdade de Jensen.

8. Comece escrevendo a desigualdade do enunciado como

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 - a_i} \leq \frac{1}{n^{n+1}} \cdot \frac{s}{1 - s},$$

onde $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$; a partir daí, reescreva tal desigualdade como

$$\sum_{i=1}^{n} \log \left(\frac{a_i}{1 - a_i} \right) \leq -(n + 1) \log n + \log \left(\frac{s}{1 - s} \right).$$

Se $a_i < \frac{1}{2}$ para $1 \leq i \leq n$, aplique a desigualdade de Jensen à função $f(x) = \log \left(\frac{x}{1-x} \right)$, $0 < x < \frac{1}{2}$; posteriormente, mostre que

$$n \log \left(\frac{s}{n - s} \right) + (n + 1) \log n \leq \log \left(\frac{s}{1 - s} \right).$$

Referências Bibliográficas

[1] AIGNER, M. e ZIEGLER, G. (2010) *Proofs from THE BOOK*. Springer-Verlag.

[2] ANDREWS, G. (1994). *Number Theory*. Dover.

[3] AKOPYAN, A. V. e ZASLAVSKY A. A. (2007). *Geometry of Conics*. American Mathematical Society.

[4] APOSTOL, T. (1967). *Calculus, Vol. 1*. John Wiley & Sons.

[5] APOSTOL, T. (1967). *Calculus, Vol. 2*. John Wiley & Sons.

[6] APOSTOL, T. (1976). *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag.

[7] DE BARROS, A. A. e ANDRADE, P. F. DE A. (2009). *Introdução à Geometria Projetiva*. Sociedade Brasileira de Matemática.

[8] BARBOSA, J. L. M. (2004). *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática.

[9] BARBOSA, J. L. M. (1995). *Geometria Hiperbólica.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[10] CARVALHO, P. C. P. (2002). *Introdução À Geometria Espacial.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[11] CHERMAN, A. (2004). *Sobre os Ombros de Gigantes.* Jorge Zahar.

[12] COHEN, L. W. e EHRLICH, G. (1963). *The structure of the real number system.* D. Van Nostrand.

[13] CONWAY, J. B. (1978). *Functions of One Complex Variable I.* Springer-Verlag.

[14] DE MORAIS FILHO, D. C. (2012). *Um Convite à Matemática.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[15] COXETER, H. S. M. e GREITZER, S. L. (1967). *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America.

[16] DIESTEL, R. (2000). *Graph Theory.* Springer-Verlag.

[17] DILWORTH, R. (1950). *A decomposition theorem for partially ordered sets*, Ann. Math. **51**, 161-166 .

[18] ERDÖS, P. e SZEKERES, G. (1935). *A combinatorial problem in geometry*, Comp. Math. **2**, 463-470.

[19] FEITOSA, S. B. (2006) *O teorema de Turán*, Sigma **3**, 2-4.

[20] DE FIGUEIREDO, D. G. (1996). *Análise I.* LTC.

[21] DE FIGUEIREDO, D. G. (2002). *Números Irracionais e Transcendentes.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[22] GARCIA, A. e LEQUAIN, Y. (2002). *Elementos de Álgebra.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[23] GONÇALVES, A. (1999). *Introdução à Álgebra.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[24] HEATH, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Dover.

[25] HILBERT, D. e COHN-VOSSEN, S. (1999). *Geometry and Imagination.* American Mathematical Society.

[26] HOFFMAN, K. e KUNZE, R. (1971). *Linear Algebra.* Prentice-Hall.

[27] HONSBERGER, R. (1985). *Mathematical Gems III.* The Mathematical Association of America.

[28] HONSBERGER, R. (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry.* The Mathematical Association of America.

[29] LIMA, H. N. (2011). *Limites e Funções Aritméticas.* Preprint.

[30] IEZZI, G. e POMPEO, J. N. (1991). *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Vol. 9.* Atual Editora.

[31] JOHNSON, R. (2007). *Advanced Euclidean Geometry.* Dover.

[32] LANDAU, E. (2002). *Teoria Elementar dos Números.* Ciência Moderna.

[33] LIMA, E. L. (1997). *Medida e Forma em Geometria.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[34] LIMA, E. L. (2004). *Curso de Análise, Vol.* 1. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[35] LIMA, E. L. (2009). *Curso de Análise, Vol.* 2. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[36] LOZANSKY, E. e ROUSSEAU, C. (1996). *Winning Solutions.* Springer-Verlag.

[37] MITRINOVIC, D. (1964). *Elementary Inequalities.* Noordhoff.

[38] MOREIRA, C. G. e KOHAYAKAWA, Y. (2001). *Tópicos em Combinatória Contemporânea.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[39] NUSSENZVEIG, H. M. (2002). *Curso de Física Básica, Vol. 1.* Edgard Blucher.

[40] ROBERTS, J. (1978). *Elementary number theory: a problem oriented approach.* MIT Press.

[41] RUDIN, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, Inc.

[42] SCHEINERMAN, E. (2010). *Matemática Discreta, uma Introdução.* Cengage Learning.

[43] SINGH, S. (1998). *O Último Teorema de Fermat.* Record.

[44] STEIN, E. e SHAKARCHI, R. (2003). *Fourier Analysis. An Introduction.* Princeton University Press.

[45] TENT, M. B. W. (2006). *Prince of Mathematics: Carl Friedrich Gauss.* A. K. Peters Ltd.

[46] TURÁN, P. (1941). *An extremal problem in graph theory.* Mat. Fiz. Lapok **41**, 435-452.

[47] VAINSENCHER, I. (1996). *Introdução às Curvas Algébricas Planas.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[48] VAN LINT, J. H. e WILSON, R. M. (2001). *Combinatorics.* Cambridge University Press.

[49] WILF, H. (1994). *Generatingfunctionology.* Academic Press.

[50] YAGLOM, I. M. (1962). *Geometric Transformations I.* The Mathematical Association of America.

CAPÍTULO A

Glossário

APMO: Asian-Pacific Mathematical Olympiad.

Áustria-Polônia: Olimpíada de Matemática Austro-Polonesa.

BMO: Balkan Mathematical Olympiad.

Baltic Way: Baltic Way Mathematical Contest.

Crux: Crux Mathematicorum, periódico de problemas da Sociedade Canadense de Matemática.

IMO: International Mathematical Olympiad.

Israel-Hungria: Competição Binacional Israel-Hungria.

Miklós-Schweitzer: The Miklós-Schweitzer Mathematics Competition (Hungria).

NMC: Nordic Mathematical Contest.

OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática.

OBMU: Olimpíada Brasileira de Matemática para Universitários.

OCM: Olimpíada Cearense de Matemática.

OCS: Olimpíada de Matemática do Cone Sul.

OIM: Olimpíada Ibero-americana de Matemática.

OIMU: Olimpíada Ibero-americana de Matemática Universitária.

ORM: Olimpíada Rioplatense de Matemática.

Putnam: The William Lowell Mathematics Competition (Estados Unidos).

Torneio das Cidades: The Tournament of the Towns, olimpíada intermunicipal mundial de Matemática.

Índice Remissivo

(continuação dos títulos publicados)

- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 6 - Polinômios* - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos - Terence Tao*

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. Lages Lima, P. C. Pinto Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. Lages Lima
- *Aritmética* - Abramo Hefez
- *Geometria* - Antonio Caminha Muniz Neto

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - Ivan Niven

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker

(continuação dos títulos publicados)

- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - D. Pellegrino, E. Teixeira e G. Botelho
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marquez

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - José Cuminato e Messias Meneguette

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1a a 8a* - E. Mega, R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9a a 16a* - C. Moreira, E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Shine
- *Iniciação à Matemática: Um curso com problemas e soluções* - K.I.M Oliveira e A.J.C.Fernández